
Quantum algorithm for the Vlasov simulation of the large-scale structure formation with massive neutrinos (arXiv:2310.01832)

Jan 20, 2024

宮本幸一

大阪大学 量子情報・量子生命研究センター (QIQB)

共同研究者: 山崎壮一郎(東大)、内田経夫(東大)、
藤澤幸太郎(東京工科大)、吉田直紀(東大)

Self-introduction: Koichi Miyamoto

■ これまでのキャリア

- 2013年3月: 東京大学大学院理学系研究科物理学専攻修了(研究テーマ: 宇宙論)
- 2013年4月～2017年12月
 - ✓ 三菱UFJモルガン・スタンレー証券株式会社
 - ✓ 金融派生商品(デリバティブ)のプライシングモデル開発に従事
- 2018年1月～2020年12月
 - ✓ みずほ第一フィナンシャルテクノロジー株式会社(コンサルティングファーム)
 - ✓ 法人や個人のデフォルト見込みを推定する機械学習モデル → 融資判断等に利用
 - ✓ 量子コンピューティングの金融への応用について研究をスタート(2019年～)
- 2021年1月～: 大阪大学QIQB 特任准教授

■ 現在の研究テーマ

- 量子アルゴリズムの産業ならびに科学の諸分野への応用
 - ✓ ファイナンス、バイオインフォマティクス、宇宙論・天体物理、...

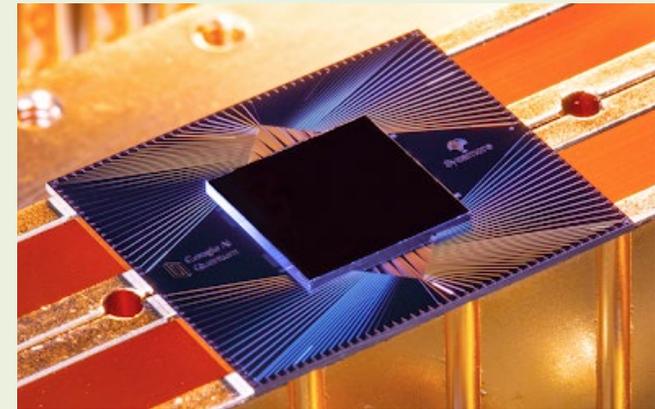
目次

1. 量子コンピューティングとは
2. 構成要素となる量子アルゴリズム
3. massive neutrinoを含んだ宇宙大規模構造形成のVlasovシミュレーション
4. massive neutrinoを含んだ宇宙大規模構造形成のVlasovシミュレーションの量子アルゴリズム
5. まとめ

1. 量子コンピューティングとは

量子コンピュータの時代が来る(?)

- 量子コンピュータに関連する多くのニュースが報じられている
 - 多くの大手テック企業が開発に参入
(Google, IBM, Amazon,...)
 - 日本でも実機開発が加速
(理研、富士通、大阪大学、...)
- 従来は計算時間的に扱えなかった数値計算の高速化を通じ、多くの産業分野で破壊的イノベーションが起こるのではと期待
 - 化学、製薬、金融、...
- 基礎科学も恩恵を受ける可能性
 - 化学、物性物理、...
 - 宇宙論も！ ← 今日のテーマ



<https://ai.googleblog.com/2019/10/quantum-supremacy-using-programmable.html>

量子コンピュータとは

■ 古典コンピュータ(我々が今日使っているコンピュータ)

- ビット(0 or 1)を操作することで計算
- ビットは0か1に100%確定

■ 量子コンピュータ

- 量子ビット(qubit)を操作することで計算

- 量子ビットは $|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $|1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の重ね合わせ状態を取る

- ✓ 要は、量子ビット=2準位量子系 ($|0\rangle, |1\rangle$ を基底とする2次元ヒルベルト空間)
 n 量子ビット系=そのテンソル積 (2^n 次元ヒルベルト空間)

古典

011010111001

ビット列は1通りに確定

量子

n 量子ビット系の取り得る状態

$$|\Psi\rangle = \sum_{s \in \{0,1\}^{\otimes n}} a_s |s\rangle = a_0 |00 \dots 00\rangle + a_1 |00 \dots 01\rangle + \dots$$

量子ビットを測定すると、どれかのビット列 s を確率 $|a_s|^2$ で得る

量子ゲート・量子回路

- 量子ゲート: 量子ビットに対する操作 (= 状態ベクトルに対するユニタリ変換)

- 1量子ビットゲートの例

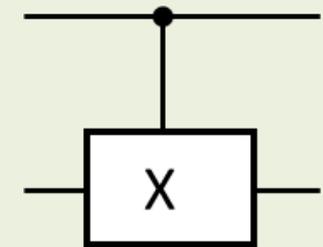
✓ NOT: $0 \Leftrightarrow 1$ のフリップ $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $|0\rangle \rightarrow \boxed{X} \rightarrow |1\rangle$ $|1\rangle \rightarrow \boxed{X} \rightarrow |0\rangle$

✓ Hadamard: $H = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$ $|0\rangle \rightarrow \boxed{H} \rightarrow \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$ $|1\rangle \rightarrow \boxed{H} \rightarrow \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$

- 2量子ビットゲートの例

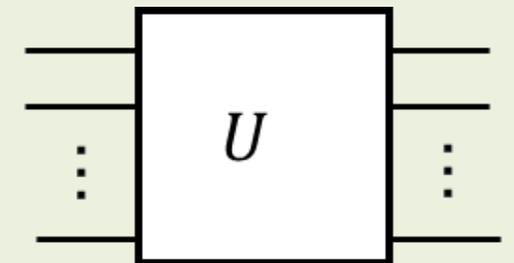
✓ CNOT (controlled NOT):
コントロールビットが1のときのみ
ターゲットビットをフリップ

$$CNOT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



- 量子ゲートを組み合わせて量子回路を構成し、所望の計算を実行

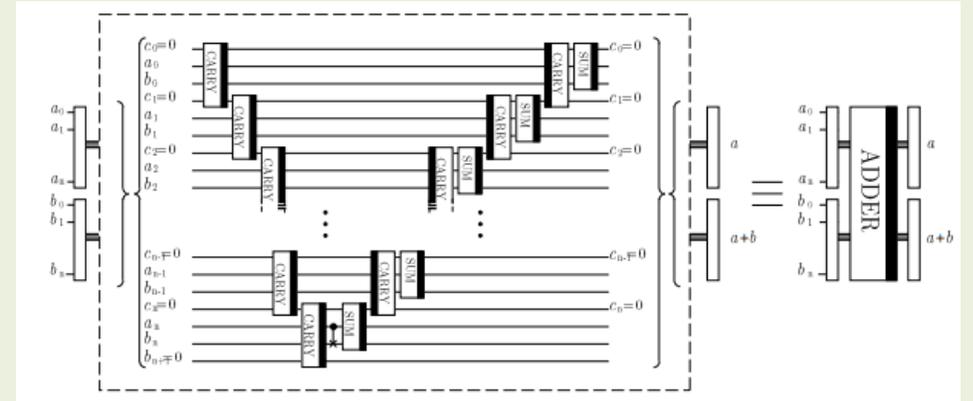
- 有限個の種類の基本ゲートを組み合わせて、
任意のユニタリ変換を任意の精度で実装できる



量子状態への数値の埋め込み方

■ binary encoding

- ビット列を数の2進数表示だと見なす → 整数を表現可能
 $|0\rangle := |0 \dots 0\rangle, \dots, |N - 1\rangle := |1 \dots 1\rangle$ ($N = 2^n$) (計算基底状態と呼ぶ)
- 適当な場所に小数点があると思えば、
実数の有限桁二進数表示が可能
- 四則演算や初等関数の適用が可能
✓例: $|x\rangle|y\rangle \rightarrow |x\rangle|x + y\rangle, |x\rangle|0\rangle \rightarrow |x\rangle|e^x\rangle$
- これだけでは古典と同じ → 量子高速化なし



加算回路 (出所: Vedral et al., PRA, 54, 147(1996))

■ amplitude encoding

- 量子状態の状態ベクトルとして 2^n 次元ベクトルを表現
 $|\vec{v}\rangle := \frac{1}{\|\vec{v}\|} \sum_{i=0}^{N-1} v_i |i\rangle$ (基底状態 $|i\rangle$ の振幅 = 第 i 成分)
- 2^n 次元ベクトルを n 量子ビットだけで表現できる
- 可能な演算はユニタリ変換に限られるが、量子高速化の可能性あり

なぜ量子コンピュータは「速い」のか？

- 指数関数的に大きなサイズの線形代数計算が、量子回路を1回実行するだけでできるから
 - n 量子ビット回路だと、 $N \times N$ の行列計算 ($N = 2^n$)

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{pmatrix} \xrightarrow{\quad U \quad} \begin{pmatrix} a'_0 \\ \vdots \\ a'_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{0,0} & \cdots & u_{0,N-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{N-1,0} & \cdots & u_{N-1,N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{pmatrix}$$

- これだけで、どんな計算でも即座に高速化されるわけではない
 - 計算結果 a'_0, \dots, a'_{N-1} は各基底状態の振幅として量子状態に埋め込まれている
 - どうやって数字として取り出す？
 - 量子回路 U の実装が大変かもしれない
 - ✓ 一般の $N \times N$ ユニタリを実装するには、 $O(2^n)$ 個の量子ゲートが必要
- しかし、いくつか重要な問題で、(既知の) 古典アルゴリズムより少ない手数で、解を数字として得る手順 (量子アルゴリズム) が提案されている
 - 問題に応じた個別のアルゴリズム設計が必要

「量子高速化」の意味

- 多くの場合、「計算時間」ではなく「計算ステップ数」に着目

即ち、クエリ計算量を議論するが多い（本講演でも原則「計算量＝クエリ計算量」の意）

➤ クエリ計算量：アルゴリズムの中で繰り返し呼ばれるオラクル（量子回路、古典でいうとサブルーチン）の呼出回数

✓例) 関数 $f(x)$ の積分 $\int_a^b f(x)dx$ を計算する中で、 $f(x)$ を計算するオラクルの呼出回数

➤ 「クエリ計算量の削減＝計算時間の削減」ではない

✓「1計算ステップにかかる時間」は古典<量子と想定されるため
(クロック周波数が量子<古典、という意味)

➤ 将来の量子コンピュータのスペックを予想するのは難しいため、計算時間の削減度合いを議論するのは困難。とは言え、何らかの仮定の下、具体的な計算時間を見積もる研究も出始めている。

✓例) RSA暗号の解読: Gidney & Eker, Quantum 5, 433 (2021)

スピン系のシミュレーション: Yoshioka et al., arXiv:2210.14109

NISQ & FTQC

■ 量子誤り訂正

- 現状の量子ビットはノイズを持つ（例： $|0\rangle$ から $|1\rangle$ に意図せずフリップ）
 - 冗長性によって保護する
 - $O(10^4)$ 個の量子ビット（物理ビット）を組合せ、実質1ビット（論理ビット）として使う

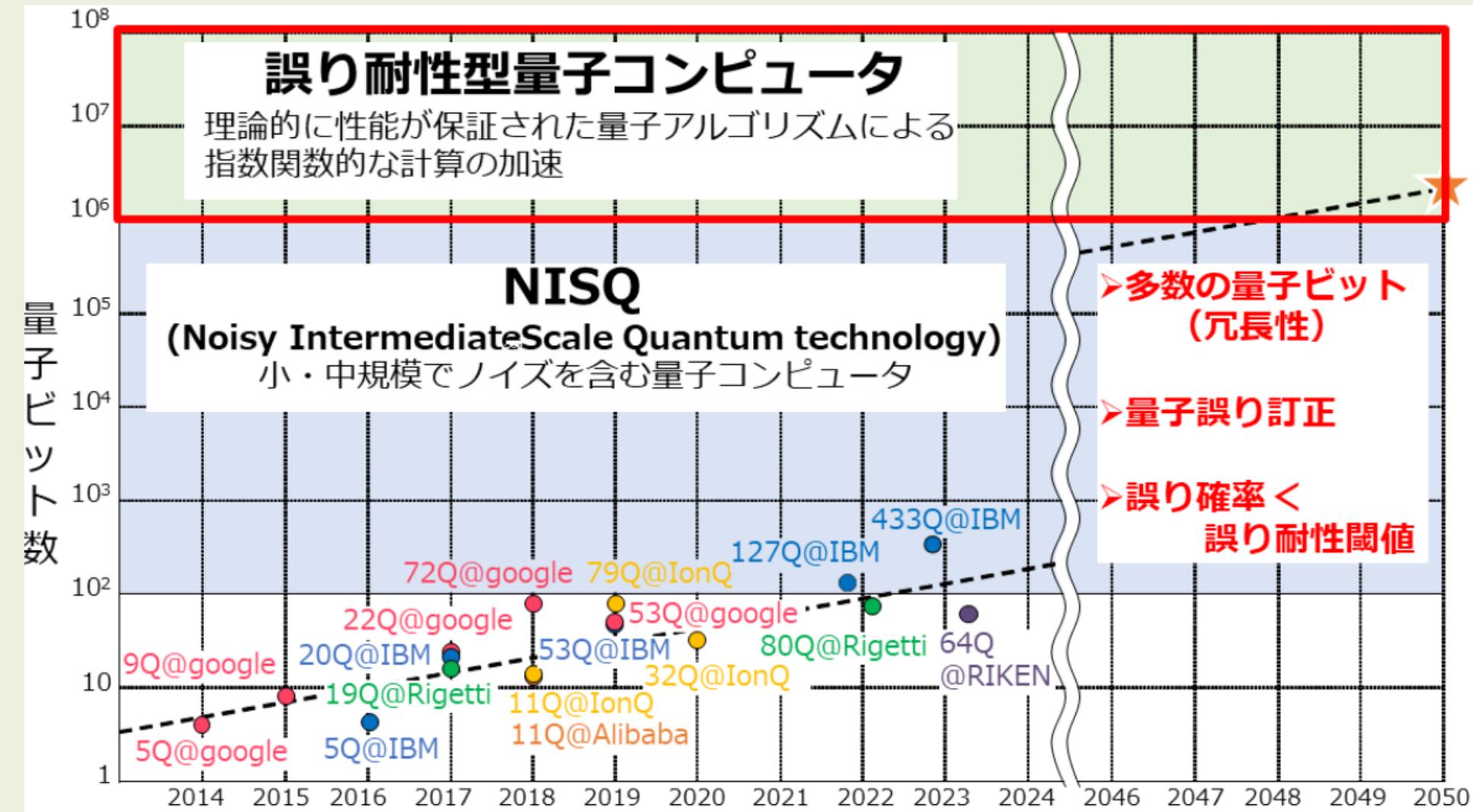
■ Fault-tolerant quantum computer (FTQC)

- 誤り訂正を備えた量子コンピュータで、長大な計算が可能
- 量子高速化が理論的に保証
- 意味のある計算を実行するには、一声 $O(10^6)$ 物理ビットが必要とされる
- 実現まで数十年か

■ NISQ (Noisy Intermediate-Scale Quantum) device

- $10^1 - 10^3$ 量子ビットを持つ、誤り訂正の無いデバイス
- 種々の活用法が提案されるも、実用的なタスクで本当に量子優位性があるかは未知数

量子ビット数の将来予想



出所：
https://www.jst.go.jp/moonshot/sympo/20230328/pdf/00_20230328_kitagawa.pdf

- 既に $O(10^2)$ 量子ビットマシンは存在 → 今やNISQ時代
- しかし、FTQC実現は数十年後か (日本政府目標:2050, Google目標: 2029)

なぜ今から量子コンピューティングの応用を研究すべきなのか？

- 本講演ではFTQCアルゴリズムのみ考える

- 疑問:

今の時点で量子コンピュータの応用、特にFTQCアルゴリズムの応用を考える必要ある？
まだ数十年先なのに...

- ある！なぜなら...

- 「あらゆる計算を、何も考えずに量子コンピュータに置き換えられて、即座に高速化できる」という話ではない
- 「我々が興味がある計算に、量子コンピュータを適用可能なのか、可能だとしてどうやって適用するのか」を検討しておくことで、FTQC時代に備え、ノウハウを蓄積
- ユースケースの探索・インパクトの見積もりをすることで、実機開発を促進

物理学の計算タスクに有用そうな量子アルゴリズムの例

量子アルゴリズム	用途例
モンテカルロ積分	期待値・積分の計算
所与のHamiltonianの下での時間発展 (Hamiltonian simulation)	化学・物性物理シミュレーション
線形方程式求解	
派生 → solve ODEs & PDEs (線形・弱い非線形)	系の発展方程式を解く
派生 → 機械学習 - 線形回帰 - サポートベクトルマシン - クラスタリング ...etc	実験データの解析 ...etc

- 本講演では、massive neutrinoを含んだ宇宙大規模構造形成のVlasovシミュレーションの量子アルゴリズムを提案

➤ Hamiltonian simulationによるPDE求解法を利用

2. 構成要素となる量子アルゴリズム

Block encoding

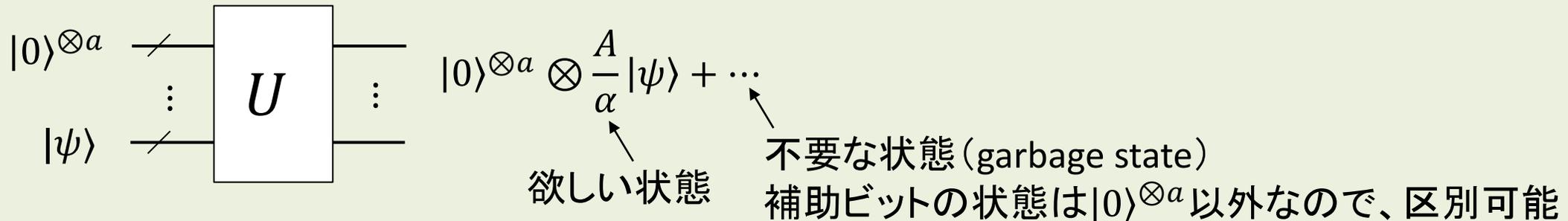
■ 非ユニタリ行列を、ユニタリ行列の”左上ブロック”として実装するテクニック

➤ A : 非ユニタリ \Rightarrow 量子回路として実装できない

➤ $\frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} A & * \\ * & * \end{pmatrix}$: ユニタリ \Rightarrow 量子回路として実装可能

✓ α : A/α の各行・各列のノルムを1以下にするためのファクター

■ 定義: s 量子ビット系の演算子 A に対し、補助量子ビット a 個を加えた系のユニタリ U が $\|A - \alpha(\langle 0|^{\otimes a} \otimes I)U(|0\rangle^{\otimes a} \otimes I)\| \leq \epsilon$ を満たす時、 U を A の (α, a, ϵ) -block-encodingと言う



■ 疎行列 A のblock-encodingは効率的に実装可能†

➤ 各成分を計算する回路 $O_{\text{ent}}^A: |i\rangle|j\rangle|0\rangle \rightarrow |i\rangle|j\rangle|A_{ij}\rangle$ があれば、 O_{ent}^A を $O(1)$ 回使って作れる

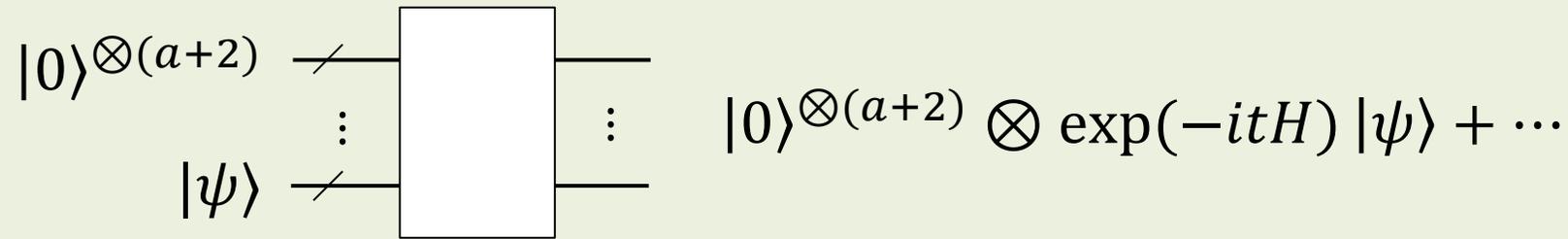
† Gilyen et al., STOC 2019, pp. 193-204 ※ --- : 複数量子ビットをまとめて書く記号

Block encoding-based Hamiltonian simulation

- エルミート行列 H の block-encoding が与えられれば、ハミルトニアン H の下での時間発展演算子の block-encoding が作れる

- 定理†

H の $(\alpha, a, \epsilon/2t)$ -block-encoding U_H が与えられたとき、これを $O(\alpha t + \log(1/\epsilon))$ 回使って、 $\exp(-itH)$ の $(1, a + 2, \epsilon)$ -block-encoding が作れる



- U_H の呼出回数は H のサイズに依らない。

U_H が、成分計算回路 O_{ent}^H から作られていれば、 O_{ent}^H の呼出回数もサイズに依らない。

量子振幅増幅 (Quantum amplitude estimation; QAE)

■ 重ね合わせ状態の中の、特定の基底状態の振幅を推定するアルゴリズム

➤ 定理†

2量子レジスタ \ddagger 系の上のユニタリ

$$A|0\rangle|0\rangle = a|\psi\rangle|1\rangle + \sqrt{1 - |a|^2}|\psi'\rangle|0\rangle$$

が与えられたとき、 $|a|^2$ の精度 ϵ の近似値を出力するアルゴリズムが存在し、
その中で A が $O(1/\epsilon)$ 回呼ばれる。

➤ ターゲット状態 $|\psi\rangle|1\rangle$ とその他の状態は、2番目のレジスタが $|1\rangle$ がそれ以外かで区別

✓ $|1\rangle$ でなくても、他の計算基底状態でも良い

† Brassard et al., Contemporary Mathematics, 305, 53 (2002)

‡ レジスタ: 複数個の量子ビットの集まりで、ひとまとまりで共通の役割を持つ (例: 1つの実数を二進数表示)

3. massive neutrinoを含んだ宇宙大規模構造形成の Vlasovシミュレーション

宇宙の大規模構造 (Large-scale structure of the Universe; LSS)

■ LSS: 宇宙の観測実験で探索できる最大スケールの物質分布の構造

- インフレーションにより作られた初期密度揺らぎを種として重力不安定性により形成
- 右図: シミュレーション結果 (本研究とは別の論文†)

■ 宇宙の”物質”のうち、多くは正体不明の暗黒物質

➤ エネルギー内訳‡

暗黒物質: 約26%

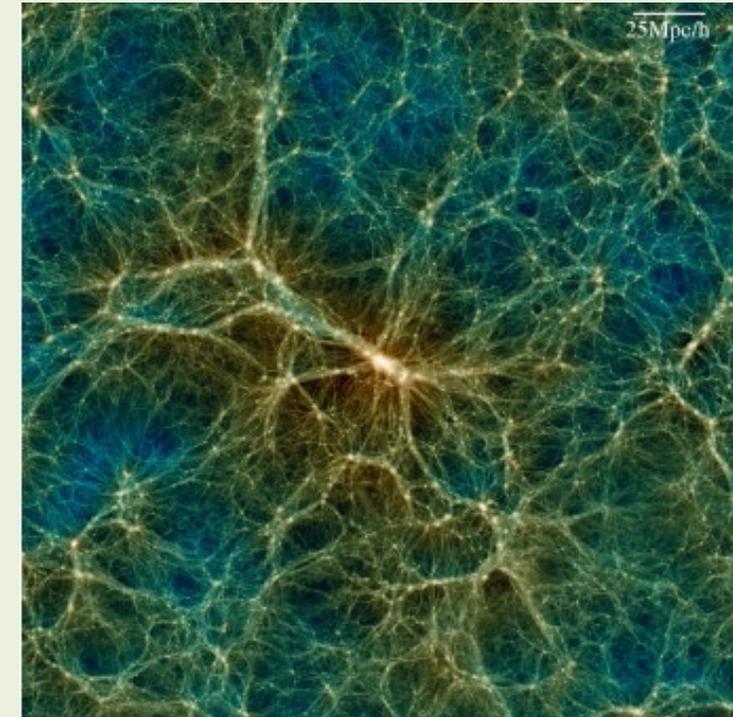
バリオン (標準模型の素粒子): 約5%

(暗黒エネルギー: 約69%)

- 通常、暗黒物質は、大きな質量を持ち (例: 超対称性粒子なら $m_{\text{CDM}} \sim \text{TeV}$)、速度は非相対論的と仮定 ($v_{\text{CDM}} \ll c$)

→ “cold dark matter (CDM)” と呼ばれる

- 以降、CDM+バリオンを便宜的に「CDM」と呼ぶ (重力に関する挙動はどちらも一緒)



† Ishiyama et al, MNRAS 506, 4210 (2021)

‡ Planck Collab., A&A 594, A13 (2016)

massive neutrino

- ニュートリノは素粒子標準模型では質量ゼロだが、ニュートリノ振動の観測により、質量を持つことが確かめられている
 - 標準模型を超える物理が存在する証拠
 - $0.05\text{eV} \lesssim m_{\nu,\text{tot}} = \sum_{i=1}^3 m_{\nu_i} \lesssim 0.1\text{eV}$ †
ニュートリノ振動 CMB,LSS等
- massive neutrinoは暗黒物質の一部としてLSS形成に影響を及ぼす
 - CDMよりずっと軽く ($m_{\nu} \ll m_{\text{CDM}}$)、速度は大きい ($v_{\text{CDM}} \ll v_{\nu}$): “hot dark matter”
 - CDMとは異なる形でLSS形成に影響
 - ✓ CDMより重力ポテンシャルにトラップされにくく、free-streamingしがち
- 逆に、massive neutrinoを含んだLSS形成シミュレーションとLSS観測結果の突合により、ニュートリノ質量に制限を加えることができる
 - LSS形成シミュレーションは宇宙論・素粒子論双方にとって重要なタスク
 - しかし容易ではない...(次頁以降で説明)

† <https://pdg.lbl.gov/2023/reviews/rpp2023-rev-neutrino-mixing.pdf>, <https://pdg.lbl.gov/2022/reviews/rpp2022-rev-neutrinos-in-cosmology.pdf>

LSS simulation w/ massive neutrino: Vlasov simulation

- CDMのシミュレーション: N体シミュレーションが一般的
 - CDMを多数(N個)の質点と見做し、互いの重力の下で運動方程式を解く
 - CDMの速度分散は小さいため、これでOK
 - Vlasov simulationに比べれば大変でない
- massive neutrinoのシミュレーション: Vlasov simulationが望ましい
 - Vlasov 方程式(無衝突ボルツマン方程式)を解く
$$\frac{\partial}{\partial t} f(t, \vec{x}, \vec{v}) + \vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}} f(t, \vec{x}, \vec{v}) + \vec{F}(t, \vec{x}) \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{v}} f(t, \vec{x}, \vec{v}) = 0$$
 - ✓ 位相空間(位置 \vec{x} + 速度 \vec{v} の6次元空間)中の粒子の分布関数 f を記述
 - ✓ \vec{F} : 粒子にかかる力(今の場合、CDM+ニュートリノが作る重力)
 - ニュートリノの速度分散は大きいため、 \vec{v} に関する分布も精緻に求めながら時間発展を追うのが望ましい

Vlasov simulationは容易でない

- Vlasov simulation = (6+1)次元のPDEを解く ("1":時間)

→ 計算時間・メモリ両面で容易でない

➤ 例: 有限差分法

✓ 位相空間にグリッド点を配置し、
グリッド点上の f の差分で f の微分を近似

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x_i, v_j) \simeq \frac{f(x_{i+1}, v_j) - f(x_{i-1}, v_j)}{2\Delta x}, \quad \frac{\partial}{\partial v} f(x_i, v_j) \simeq \frac{f(x_i, v_{j+1}) - f(x_i, v_{j-1})}{2\Delta v}$$

✓ PDEをODEに変換し、これを解く

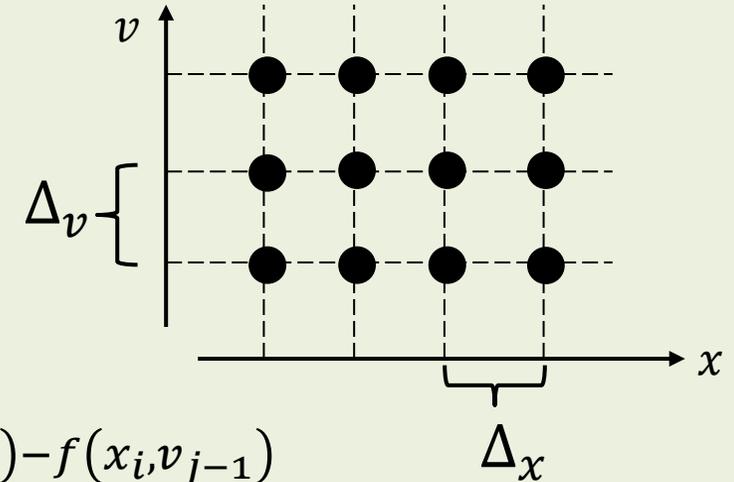
$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} + \vec{F} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} \vec{f} = A \vec{f}$$

($\vec{f} = (f(t, \vec{x}_1, \vec{v}_1), f(t, \vec{x}_1, \vec{v}_2), \dots, f(t, \vec{x}_{n_{\text{gr}}^3}, \vec{v}_{n_{\text{gr}}^3}))$): グリッド上の f の値を並べたもの
行列 A :後述)

✓ 位相空間各次元につき n_{gr} 個のグリッド点を取るとすると、グリッド点の総数は n_{gr}^6 個

→ \vec{f} は n_{gr}^6 次元、 $O(n_{\text{gr}}^6)$ のメモリコスト

✓ 時間方向のグリッド数を n_t とすると、計算量は $O(n_{\text{gr}}^6 n_t)$



4. massive neutrinoを含んだ宇宙大規模構造形成の
Vlasovシミュレーションの量子アルゴリズム

Vlasov方程式の線形近似

■ 量子アルゴリズム適用のため、まずはVlasov方程式を線形近似

➤ 重力 \vec{F} = CDMが作る重力 + ニュートリノ自身が作る重力

→ \vec{F} はニュートリノ分布 f に依存

→ Vlasov方程式 $\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} + \vec{F} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0$ ならびに有限差分版 $\frac{d}{dt} \vec{f} = A \vec{f}$ は非線形

\swarrow f に依存

\swarrow \vec{f} に依存

➤ 基本的に、量子コンピュータは非線形問題は扱えない

✓ 量子力学の線形性のため (状態ベクトルの変換はユニタリ変換しか許されない)

➤ ニュートリノの自己重力を無視することで線形化

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} + \vec{F}_{\text{CDM}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0$$

\swarrow CDM重力のみ、 f に非依存

✓ ニュートリノ密度 / CDM密度 $\approx 7.6 \times 10^{-3} \times \frac{m_{\nu, \text{tot}}}{0.1 \text{eV}} \ll 1$ なので、

ニュートリノ自己重力 \ll CDM重力

➤ \vec{F}_{CDM} はCDMのみのN体シミュレーションで予め求められていると仮定

線形化したVlasov方程式の有限差分近似

- 有限差分近似でPDEをODEに

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{x}} + \vec{F}_{\text{CDM}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt} \vec{f} = A \vec{f}$$

$$A = A_x + A_y + A_z + A_{v_x} + A_{v_y} + A_{v_z} : n_{gr}^6 \times n_{gr}^6 \text{ 行列}$$

$$A_x = - \begin{pmatrix} 0 & 1/2\Delta_x & & & -1/2\Delta_x & \\ -1/2\Delta_x & 0 & 1/2\Delta_x & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -1/2\Delta_x & 0 & 1/2\Delta_x & \\ 1/2\Delta_x & & & -1/2\Delta_x & 0 & \end{pmatrix} \otimes \text{diag}(v_{x,1}, \dots, v_{x,n_{gr}})$$

$$A_{v_x} = -\text{diag}(F_{\text{CDM},x}(t, x_1), \dots, F_{\text{CDM},x}(t, x_{n_{gr}})) \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1/2\Delta_v & & & & \\ -1/2\Delta_v & 0 & 1/2\Delta_v & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -1/2\Delta_v & 0 & 1/2\Delta_v & \\ & & & -1/2\Delta_v & 0 & \end{pmatrix}$$

➤ \vec{x} 方向には周期的境界条件、 \vec{v} 方向にはディリクレ境界条件($f = 0$)を課した

※ 簡単のため1次元の場合の A_x, A_{v_x} を書いたが、実際には3次元なので異なる

Hamiltonian simulationの適用

- A は反エルミート ($A = -A^\dagger$)なので、 $\frac{d}{dt} \vec{f} = A\vec{f}$ はシュレーディンガー方程式と見做せる

$$\rightarrow \frac{d}{dt} |\vec{f}(t)\rangle = -iH |\vec{f}(t)\rangle$$

$$\text{ハミルトニアン: } H = -iA \quad (H = H^\dagger)$$

$$|\vec{f}(t)\rangle = \frac{1}{C} \sum_{i,j} f(t, \vec{x}_i, \vec{v}_j) |i\rangle|j\rangle \quad (C: \text{規格化定数})$$

- Hamiltonian simulationを適用し、初期条件 $|\vec{f}(0)\rangle$ から時間発展させた $|\vec{f}(T)\rangle$ が得られる

➤ Hamiltonian simulationのためには H のblock-encodingが必要だが、これは構成可能

✓ H は疎 (nonzero成分は各行・各列高々12個)

✓ H の各成分はあらわに与えられており、回路 $O_{\text{ent}}^H: |i\rangle|j\rangle|0\rangle \rightarrow |i\rangle|j\rangle|H_{ij}\rangle$ を構成可能

– グリッド点でのCDM重力 $\vec{F}_{\text{CDM}}(t, \vec{x}_k, \vec{v}_l)$ は事前に計算しており、

これを格納したQRAM ($O_{F_{\text{CDM},x}}: |k\rangle|l\rangle|0\rangle \rightarrow |k\rangle|l\rangle|F_{\text{CDM},x}(t, \vec{x}_k, \vec{v}_l)\rangle$)を使う

※ quantum random access memory (QRAM):

インデックス i を指定し、それに紐づいた数値 c_i を量子レジスタ上に読み込むデバイス ($|i\rangle|0\rangle \rightarrow |i\rangle|c_i\rangle$)

理論的な実装提案はあるが、未だ存在せず (Giovannetti et al., PRL 100, 160501 (2008))

Vlasov simulationの量子アルゴリズムの計算量

■ 定理 (informal)

➤ $\epsilon \in (0, 1/2)$ とする。

時刻 T でのニュートリノ分布関数 $f(T, \vec{x}, \vec{v})$ を埋め込んだ量子状態を生成する量子回路

$$U_{f(T), \epsilon} |0\rangle = \frac{1}{C} \sum_{i,j} f(T, \vec{x}_i, \vec{v}_j) |i\rangle |j\rangle + |\psi_{\text{gar}}\rangle$$

を構成することができる。

ただし、 $|\psi_{\text{gar}}\rangle$ は $\| |\psi_{\text{gar}}\rangle \| \leq \epsilon$ なる (規格化されていない) 量子状態である†。

$U_{f(T), \epsilon}$ の中では $O_{F_{\text{CDM},x}}, O_{F_{\text{CDM},y}}, O_{F_{\text{CDM},z}}$ が $O\left(n_{\text{gr}} + n_t \log\left(\frac{n_t}{\epsilon}\right)\right)$ 回呼ばれる。

■ 古典の計算量 $O(n_{\text{gr}}^6 n_t)$ と比べて大幅な高速化

† 量子状態 $|\psi\rangle$ のノルム $\| |\psi\rangle \| =$ 状態ベクトルのノルム

ニュートリノ密度揺らぎのパワースペクトル

- 上述の量子アルゴリズムで、Vlasov方程式の解を埋め込んだ量子状態が作れた
→ しかし、我々は量子状態が欲しいわけではない！
物理的に興味のある量を数字として知りたい！

- 例：ニュートリノ密度揺らぎのパワースペクトル†

$$P(k) = \langle |\tilde{\delta}(\vec{k})|^2 \rangle$$

$$\tilde{\delta}(\vec{k}) = \frac{1}{V} \int \delta(\vec{x}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} d\vec{x}, \delta(\vec{x}) = \frac{\rho(\vec{x}) - \bar{\rho}}{\bar{\rho}}, \rho(\vec{x}) = \int f(T, \vec{x}, \vec{v}) d\vec{v}, \bar{\rho} = \frac{1}{V} \int \rho(\vec{x}) d\vec{x}$$

$V = L^3$: グリッドがカバーする領域の体積

L : 位置座標各方向にグリッドがカバーする領域の長さ

$\langle \cdot \rangle$: 初期揺らぎのランダム性に関するアンサンブル平均

➤ ニュートリノ密度 $\rho(\vec{x})$ の揺らぎ $\delta(\vec{x})$ の波数 \vec{k} の成分の大きさを示す

➤ グリッド点上の f の値で近似的に計算すると、

$$\tilde{\delta}(\vec{k}) \simeq \frac{1}{n_{\text{gr}}^3} \sum_i \delta_i e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}_i}, \delta_i = \frac{\rho_i - \bar{\rho}}{\bar{\rho}}, \rho_i = \sum_j f(T, \vec{x}_i, \vec{v}_j) \Delta_v^3, \bar{\rho} = \frac{1}{n_{\text{gr}}^3} \sum_i \rho_i$$

† Jing, ApJ 620, 559 (2005)

量子状態からニュートリノ密度揺らぎパワースペクトルを読み出す

- $|\vec{f}(T)\rangle = \frac{1}{C} \sum_{i,j} f(T, \vec{x}_i, \vec{v}_j) |i\rangle|j\rangle$ に $W = \text{QFT} \otimes \text{Had}$ をかける +

$$(\text{QFT}|j\rangle) = \frac{1}{\sqrt{n_{\text{gr}}}} \sum_{k=0}^{n_{\text{gr}}-1} \exp\left(2\pi i \frac{jl}{n_{\text{gr}}}\right) |l\rangle : \text{量子フーリエ変換}$$

Had: レジスタ中の各量子ビットにHadamardをかける)



$$W|\vec{f}(T)\rangle = \frac{1}{C'} \sum_i \tilde{\delta}(k_i) |i\rangle|0\rangle, k_i = \frac{2\pi i}{L}, C': \text{規格化定数}$$

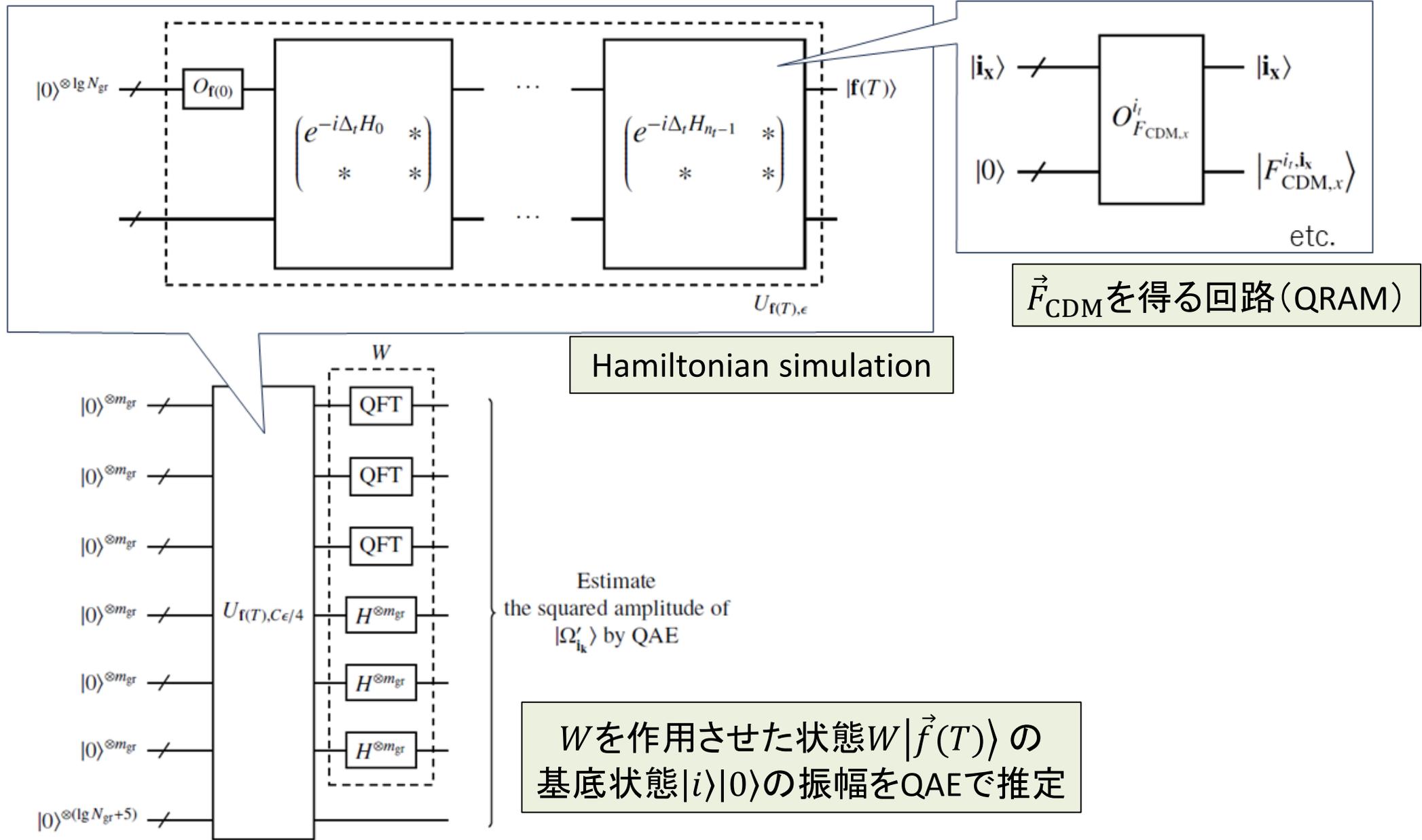
- $W|\vec{f}(T)\rangle$ に対してQAEを行い、計算基底状態 $|i\rangle|0\rangle$ の振幅を読み出すことで、

$$P(\vec{k}) = \left\langle |\tilde{\delta}(\vec{k})|^2 \right\rangle \text{を推定できる} \ddagger$$

+ 簡単のため1次元の場合を書いたが、実際には3次元なので異なる

‡ 厳密には、 C' の値を知る必要があるが、実際に求まる。また、上記手法で得られるのは1通りの初期値に対する $|\tilde{\delta}(\vec{k})|^2$ だが、アンサンブル平均も求めることが可能。詳細はarXiv:2310.01832参照。

ニュートリノ密度揺らぎパワースペクトル推定の量子回路の全体図



ニュートリノ密度揺らぎパワースペクトル推定の量子アルゴリズムの計算量

■ 定理 (informal)

➤ $\epsilon \in (0, 1/2)$ とする。

時刻 T での波数 \vec{k} に対するニュートリノ密度揺らぎパワースペクトル $P(\vec{k})$ を精度 ϵ で推定する量子アルゴリズムが存在する。

その中では $O_{F_{\text{CDM},x}}, O_{F_{\text{CDM},y}}, O_{F_{\text{CDM},z}}$ が $O\left(\frac{n_{\text{gr}} + n_t \log\left(\frac{n_t}{\epsilon}\right)}{\epsilon}\right)$ 回呼ばれる。

■ 古典の計算量 $O(n_{\text{gr}}^6 n_t)$ と比べて大幅な高速化

5. まとめ

まとめ

- 量子コンピューティングの開発は急速に進んでおり、実用的なユースケースの探索も盛ん
- 宇宙論における応用のひとつとして、massive neutrinoを含んだLSS形成のVlasovシミュレーションを考えた
 - Vlasov方程式は(6+1)次元のPDEであり、これを古典コンピュータで解くのは容易でない
- 量子アルゴリズムの概要
 - ニュートリノ自己重力を無視する近似の下、Vlasov方程式を線形化
 - 有限差分近似によってPDEをODEに → ある種のシュレーディンガー方程式と見做せる
 - Hamiltonian simulationの量子アルゴリズムを適用し、解を埋め込んだ状態 $|\vec{f}(T)\rangle$ を生成
- さらに、QAEを利用して、 $|\vec{f}(T)\rangle$ からニュートリノ密度揺らぎのパワースペクトルを数字として読み出せる
 - 計算量 $O\left(\frac{n_{\text{gr}} + n_t \log\left(\frac{n_t}{\epsilon}\right)}{\epsilon}\right)$ ← 古典の場合 $O(n_{\text{gr}}^6 n_t)$ と比べて大幅な高速化