QCD相構造研究における 虚数化学ポテンシャルの有用性について

柏 浩司



Introduction



Introduction



Pictures: from Wikipedia











QCD相図の模式図

K. Fukushima and T. Hatsuda, Rept.Prog.Phys.74 (2011) 014001.



QCD相図の模式図





Schematic QCD phase diagram

M. Stephanov, Prog. Theor. Phys. Suppl. 153 (2004) 139.



第一原理計算の問題点

QCDを用いた第一原理計算(格子QCD数値計算)は、 有限実数化学ポテンシャル領域で破綻してしまう・・・

第一原理計算

格子QCD数値シミュレーション





第一原理計算の問題点

QCDを用いた第一原理計算(格子QCD数値計算)は、 有限実数化学ポテンシャル領域で破綻してしまう・・・

第一原理計算

格子QCD数値シミュレーション



第一原理計算の問題点

QCDを用いた第一原理計算(格子QCD数値計算)は、 有限実数化学ポテンシャル領域で破綻してしまう・・・

第一原理計算 格子QCD数値シミュレーション 数値計算上の問題ではあるが... Sign problem 様々な手法が提案されているが どれも完全には程遠い・・・

格子QCD計算はゼロ化学ポテンシャルでは厳密に実行可能

→ 計算機の発展が重要

▶ 符号問題のため、実数化学ポテンシャル領域で計算が破綻

Important Sampling

$$Z(\mu_q) = \int D \operatorname{U} \operatorname{det}[M] \exp\left(-S_G\right)$$
$$\left\langle O\right\rangle = \frac{1}{Z} \int D \operatorname{U} O \operatorname{det}[M] \exp\left(-S_G\right)$$

確率

Dirac operator :

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{\mu}_{q}) = \boldsymbol{\gamma}_{\mu}\boldsymbol{D}^{\mu} + \boldsymbol{\gamma}_{4}\boldsymbol{\mu}_{q} + \boldsymbol{m}_{0}$$



PNJL model



擬臨界温度の決め方

相転移の次数と臨界温度

エーレンフェストの分類 きれいに次数を決められ、臨界温度も決まる 有限体積スケーリング

クロスオーバーと擬臨界温度

(秩序変数の)感受率のピーク等で決定

非閉じ込め相転移には通常 Polyakov-loop を使う

我々の手法 : 有効模型+格子QCDデータ

格子QCDデータを利用して <mark>有効模型を拡張する</mark>





我々の手法 : 有効模型+格子QCDデータ なぜ虚数化学ポテンシャルか?

1. 符号問題がない

2. QCDのもつ面白い性質が見える

3. 実数化学ポテンシャルの情報を持っている

幸運にも虚数化学ポテンシャル領域はµ_R領域の情報を持っている

A. Roberge and N. Weiss, Nucl. Phys. **B** 275 (1986) 735.



幸運にも虚数化学ポテンシャル領域はµ_R領域の情報を持っている

A. Roberge and N. Weiss, Nucl. Phys. **B** 275 (1986) 735.

フーリエ変換:

$$Z_{\text{Canonical}}(T,B) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\left(\frac{\mu_I}{T}\right) e^{-iB\mu_I/T} Z_{\text{Grand Canonical}}(T,\mu_I)$$

フガシティー展開:

$$Z_{\text{Grand Canonical}}(T,\mu_R) = \sum_{B=-\infty}^{\infty} e^{B\mu_R/T} Z_{\text{Canonical}}(T,B)$$

 $+\infty$

実数化学ポテンシャルでも信頼できる模型を得ることができる(原理的には)。

実際の数値計算的正目は現在進行中・・・

(First attempt in two color QCD)

T. Makiyama, Y. Sakai, T. Saito, M. Ishii, J. Takahashi, K.K., H. Kouno, A. Nakamura and M. Yahiro, arXiv:1502.06191.



虚数化学ポテンシャル領域での格子QCD計算だけではある程度のことは議論できる



虚数化学ポテンシャル領域での格子QCD計算だけではある程度のことは議論できる











閉じ込め相

バリオンフガシティーが重要

Strong coupling limit of QCD, chiral perturbation theory with relativistic Virial expansion or finite energy sum rule



$$\mathcal{V}_{\rm SC} \sim -T \ln \left[\frac{1}{4} \cos(N_{\rm c} \theta) \right]$$

Y. Nishida, PRD 69 (2004) 094501.

N. Kawamoto, K. Miura, A. Ohnishi and T. Ohnuma, PRD 75 (2007) 014502.

> RW転移がない RW 周期性はある

非閉じ込め相

D. J. Gross, R. D. Pisarski and L. G. Yaffe, Rev. Mod. Phys. 53 (1981) 43.
 N. Weiss, PRD 24 (1981) 475.

Perturbative one-loop effective potential with background gauge field



Deconfined phase

Perturbative one-loop effective potential with background gauge field



どのような模型を用いればよいのか?

Nambu—Jona-Lasinio (NJL) model

$$L = \overline{q} (i\gamma^{\mu} \partial_{\mu} - m_0) q + G_s \left(\left(\overline{q}q \right)^2 + \left(\overline{q}i\gamma_5 \vec{\tau}q \right)^2 \right)$$



この模型は 2π 周期しか持たない



この模型は使えない・・・



PNJL model, holographic model etc...

Polyakov-loop extended NJL (PNJL) model

K. Fukushima, Phys. Lett. B591 (2004) 277

$$L = \overline{q}(i\gamma^{\mu}D_{\mu} - m_{0})q + G_{s}\left(\left(\overline{q}q\right)^{2} + \left(\overline{q}i\gamma_{5}\vec{\tau}q\right)^{2}\right) - U(\overline{\Phi},\Phi)$$
グルーオンの寄与
熱力学ポテンシャル (平均場近似)

$$\frac{\Omega}{V} = U + U_M - 2N_f \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[N_c E(p) + T \ln \left(1 + (\Phi + \overline{\Phi} e^{-\beta E^-}) e^{-\beta E^-} + e^{-3\beta E^-} \right) + T \ln \left(1 + (\Phi + \overline{\Phi} e^{-\beta E^+}) e^{-\beta E^+} + e^{-3\beta E^+} \right) \right]$$

ただし、QCDには使えるが随伴表現の場合は 使えない可能性(細谷機構がある場合)

Few discussions: <u>K.K.</u> and T. Misumi, JHEP 05 (2013) 042

PNJL模型でのベクター型相互作用

K.K., H. Kouno, M. Matsuzaki, M. Yahiro, Phys. Lett. B 662 (2008) 26.



In the case of NJL model : M. Kitazawa, T. Koide, T. Kunihiro and Y. Nemoto, PTP 108 (2002) 929.

PNJL model : Y. Sakai, <u>K. K</u>, H. Kouno, M. Matsuzaki and M. Yahiro, Phys. Rev. D 79 (2009) 096001.



TABLE II: Summary of the parameter sets in the PNJL calculations. The parameters Λ , m_0 and T_0 are common among the three sets; $\Lambda = 631.5$ MeV, $m_0 = 5.5$ MeV and $T_0 = 212$ MeV.



Lattice data:

P. de Forcrand and O. Philipsen, Nucl. Phys. B 642 (2002) 290.

L. K. Wu, X. Q. Luo and H. S. Chen, Phys. Rev. D 76 (2007) 034505.

Model setting

Polyakov-loop effective potential

K. Fukushima, Phys. Lett. B591 (2004) 277.

$$\frac{U}{T^4} = -\frac{1}{2}a(T)\bar{\Phi}\Phi + b(T)\ln[1 - 6\bar{\Phi}\Phi + 4(\bar{\Phi}^3 + \Phi^3) - 3(\bar{\Phi}\Phi)^2]$$

Meisinger-Miller- Ogilvie model

P. N. Meisinger, T. R. Miller, M. C. Ogilvie, PRD 65 (2002) 034009.

$$\mathbf{U} = -\sum_{j,k=1}^{N} \frac{1}{\pi^2} (1 - \frac{1}{N} \delta_{jk}) \left[-\frac{2\pi^4}{3\beta^4} B_4 \left(\frac{\Delta \theta_{jk}}{2\pi} \right) - \frac{M^2 \pi^2}{2\beta^2} B_2 \left(\frac{\Delta \theta_{jk}}{2\pi} \right) \right]$$

Matrix model for deconfinement

 $\beta U \simeq -\frac{1}{2} \operatorname{tr} \ln D_A^{-1} + \operatorname{tr} \ln D_C^{-1}$

A. Dumitru, Y. Guo, Y. Hidaka, C. P. K. Altes, R. D. Pisarski, PRD 83 (2011) 034022.

$$\mathsf{U} = \frac{2\pi^2 T^4}{3} \sum_{i,j=1}^{N} q_{ij}^2 (1 - |q_{ij}|)^2 - (N_{\rm c}^2 - 1) \frac{\pi^2 T^4}{45} + T^2 T_{\rm c}^2 \sum_{i,j=1}^{N} \left[c_1 |q_{i,j}| (1 - |q_{ij}|) + c_2 q_{ij}^2 (1 - |q_{ij}|)^2 \right]$$

Effective potential from (Landau gauge) gluon and ghost propagator

$$D_A^{-1}(p^2) = \left[p^2 Z_A(p^2) T_{\mu\nu} + \xi^{-1} p^2 Z_L(p^2) L_{\mu\nu} \right] \delta^{ab}$$
$$D_C^{-1}(p^2) = p^2 Z_C(p^2)$$

Results : Colombia plot at imaginary chemical potential

Colombia plot



Results : Colombia plot at imaginary chemical potential

Colombia plot





グルーオン部分の模型の不定性が大きく現れる







K.K., V. V. Skokov, R. D. Pisarski, Phys. Rev. D85 (2012) 114029.

<u>K.K.</u>, R. D. Pisarski, Phys. Rev. D87 (2013) 096009.

虚数化学ポテンシャルの他の解釈

虚数化学ポテンシャルは境界条件に焼き直せる



任意の境界条件での松原振動数 $\omega_n^{\phi} = 2\pi T (n + \phi) \longrightarrow \omega_n^{\phi} = 2\pi T (n + 1/2) - \pi T + 2\pi T \phi$ 任意の境界条件を指定する境界角 Boundary condition



Y. Hosotani, Phys.Lett.B 126 (1983) 309.

余剰次元成分のゲージ粒子の凝縮(自発的ゲージ対称性の破れ)の機構

標準模型を超えた理論(ヒッグス粒子の現象論)

 Relation with μ₁:
 <u>K.K.</u> and T. Misumi, JHEP 05 (2013) 042.

 H. Kouno, T. Misumi, <u>K.K.</u>, T. Makiyama, T. Sasaki,

 M. Yahiro, Phys. Rev .D 88 (2013) 016002.

Z₃ symmetric QCD

ex.) H. Kouno, T. Misumi, <u>K.K.</u>, T. Makiyama, T. Sasaki, M. Yahiro, Phys. Rev .D 88 (2013) 016002.



非閉じ込め相転移の擬臨界温度

双対クォーク凝縮 or dressed Polyakov-loop

Lattice: E. Bilgici, F. Bruckmann, C. Gattringer and C. Hagen, PRD 77 (2008) 094007.

境界角()に依存するカイラル凝縮

$$\Sigma^{(n)} = -\int_{0}^{2\pi} \frac{d\phi}{2\pi} e^{-in\phi}\sigma(\phi)$$
巻き数

n=1 の場合 Polyakov-loop と定性的に同じ振る舞いを示す

PNJL model : <u>K.K</u>, H. Kouno and M. Yahiro, Phys. Rev. **D** 80 (2009) 117901.

擬臨界温度の決め方

NJL模型でも双対クォーク凝縮は温度とともに増加する



F. Xu, H. Mao, T. K. Mukherjee and M. Huang, PRD 84 (2011) 074009.
S. Sasagawa and H. Tanaka, PTP128 (2012) 925.
A. Flachi, PRD 88 (2013) 041501.

NJL模型でも非閉じ込め相転移の擬臨界温度が決定できてしまう?

NJL模型はPNJL模型の Φ=1 極限のはずなのに?

実はカイラル相転移を見ているだけ...

S. Benic, PRD 88 (2013) 077501.

この効果は Polyakov-loop にもある(はず)

Polyakov-loopを用いない擬臨界温度の決定は興味深い(はず)



虚数化学ポテンシャルはアハロノフーボーム位相とも焼きなおせる









自発的対称性の破れ

これはいつも正しいのか?

No !

トポロジカル秩序 🛑 真空の縮退

ex) X. Wen, Int. J. Mod. Phys. B4 (1990) 239.

対称性の自発的破れはない

秩序変数もない

トポロジーを変えることで真空の縮退度の違いが見える



M. Sato, M. Kohmoto and Y.-S. Wu, PRL 97 (2006) 010601. M. Sato, PRD 77 (2008) 045013.

T³トーラスを考えるs

仮定: 励起状態を作るには有限のエネルギーは必要(質量ギャップ) 3つの操作の交換関係:



トポロジカル秩序

M. Sato, PRD 77 (2008) 045013.

もしも自由度(最小単位の粒子)が分数電荷の場合、操作が非可換になる (QCD → 非閉じ込め相:クォーク、閉じ込め相:ハドロン)

もしも一つしか真空がないと、操作が非可換なことと矛盾してしまう

異なる(断熱的)操作でたどりつく最終状態は異なる真空で無いといけない!

この考えはQCDにも使える





ただし、その現れ方には明確な違いがある(非自明な熱力学ポテンシャルの縮退)

トポロジカル秩序からのアナロジーを用いると

$$T_{RW} = T_d$$
 よさそう?
m→∞

RW endpoint at finite μ_R

Lee-Yang ゼロの解析に有用かも?

残念ながら現状この計算をPNJL模型で行うことができない...

通常の平均場近似

複素 μではRW周期性を保てない

Nishimura-Ogilvie-Pangeni method H. Nishimura, M.C. Ogilvie and K. Pangeni, PRD 90 (2014) 045039. 通常の平均場近似と同じく、複素 µではRW周期性を保てない

Complex Langevin dynamics

作用に対数項がある場合、正しい解を導く保証がない

Lefschetz thimble approach for QCD effective model (we need more extension of it for present purpose)

In preparation Y. Tanizaki, H. Nishimura, <u>K.K.</u>,



K. Nagata, K.K., S. M. Nishigaki and A. Nakamura, arXiv:1410.0783.

QCDでの Lee-Yang ゼロの解析

QCD相転移の新しい見方(方法自体は古い)



実験データからこの図を(微妙な点はあるが)計算できる!

◎ 虚数化学ポテンシャルにおけるQCDの相構造を調べた

● 様々な模型パラメータを決められる可能性があることを示した

グルーオン部分の模型の不定性については、クォーク質量が重い領域における Colombia plotを調べることで取り除くことが可能セあることを示した

● 虚数化学ポテンシャルはフェルミオンの境界条件やアハロノフーボーム位相に焼きなおす ことができる

● フェルミオン境界条件 : Dual quark condensate

カイラル相転移と非閉じ込め相転移の相関を調べることに有用

アハロノフーボーム位相:非閉じ込め相転移の擬臨界温度をRW endpointから決められる ただしこの定義は厳密ではない(トポロジカル秩序の議論はゼロ温度のみ)

● 我々の手法の正当性は、2カラーの場合で現在検証中