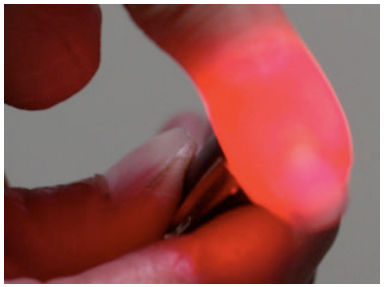
光の輸送現象とその逆問題

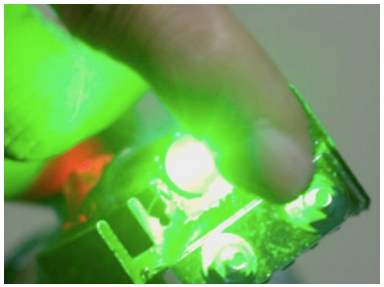
町田　学

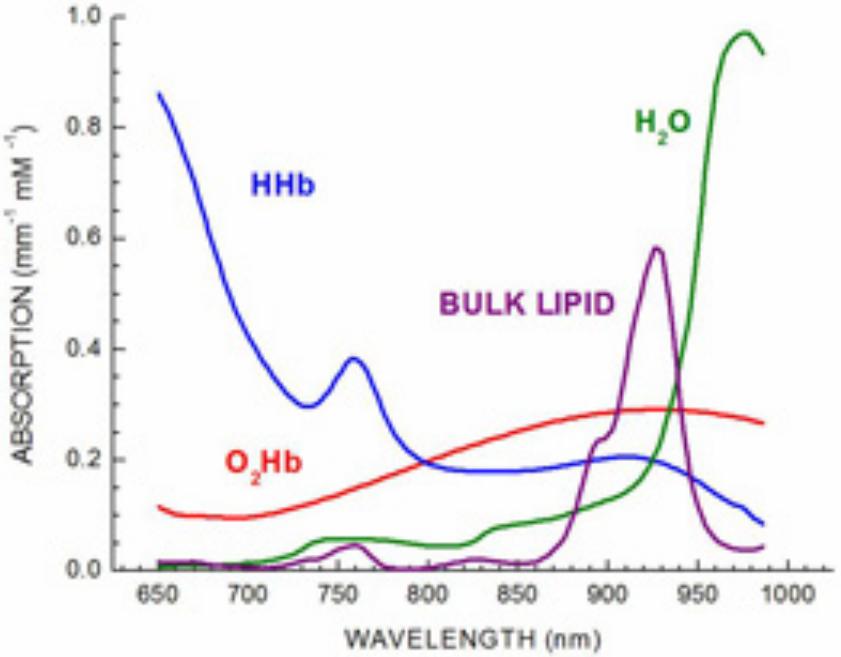
Department of Mathematics, University of Michigan

ランダム媒質：雲

ランダム媒質：生体組織

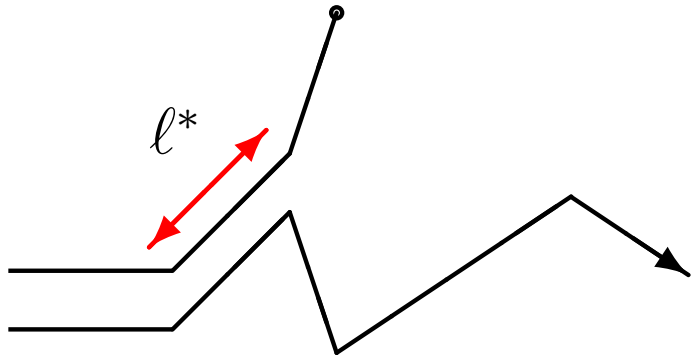





1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
ABSORPTION (mm^{-1} mM^{-1})
HHb
H_2O
BULK LIPID
O_2Hb
650
700
750
800
850
900
950
1000
WAVELENGTH (nm)

ランダム媒質：星間物質

ランダム媒質中の光



吸収

$\mu_a =$ 単位長さ当りに吸収される割合

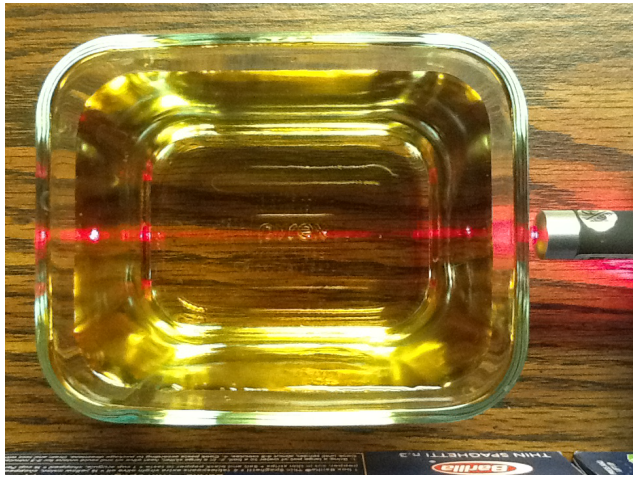
散乱

$\mu_s =$ 単位長さ当りに散乱される割合

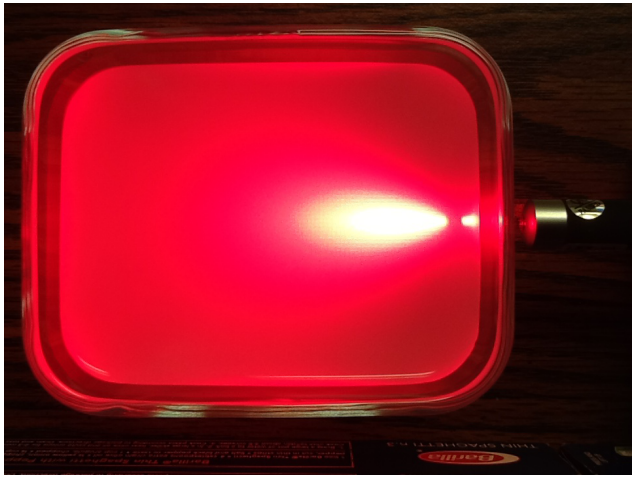
$f(\hat{\mathrm{s}}, \hat{\mathrm{s}}') =$ 散乱されたときに、$\hat{\mathrm{s}}'$ 方向の光が $\hat{\mathrm{s}}$ 方向を向く確率

光の伝播：水

光の伝播：微量

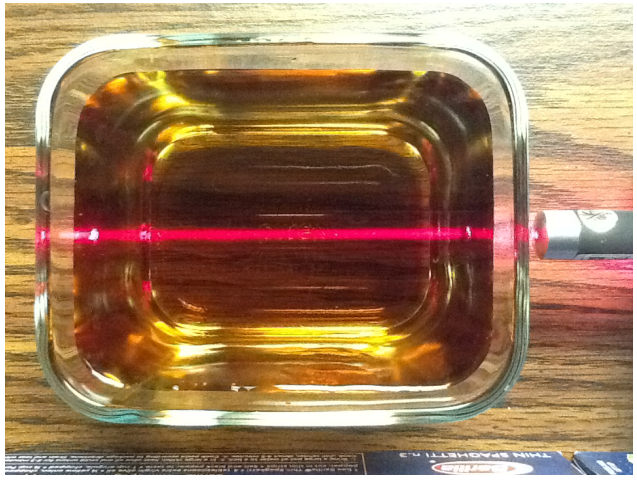


醤油

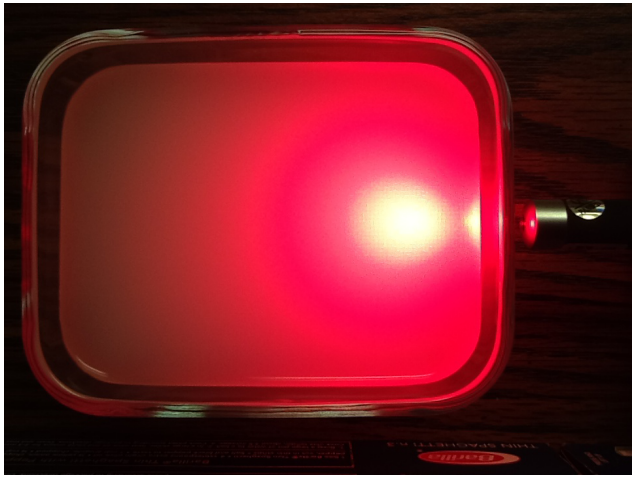


牛乳

光の伝播：少量

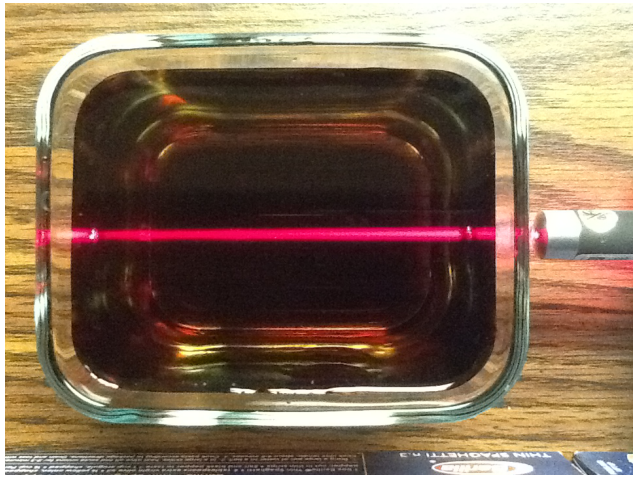


醤油

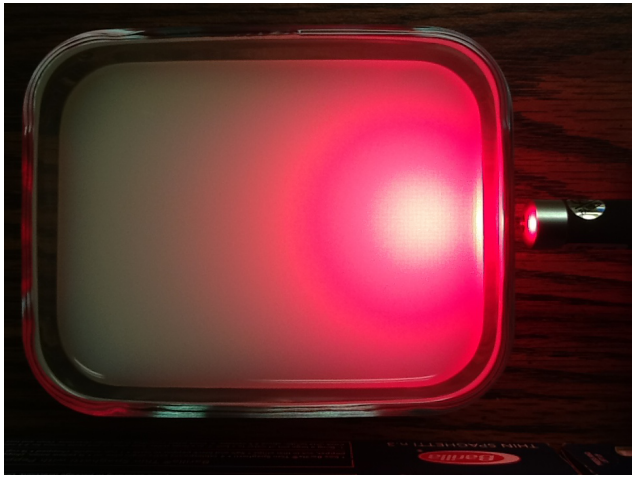


牛乳

光の伝播：もっと



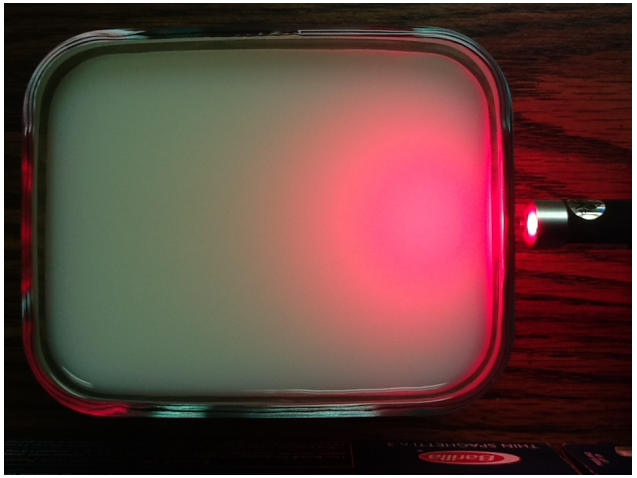
醤油



牛乳

光の伝播：さらに

醤油



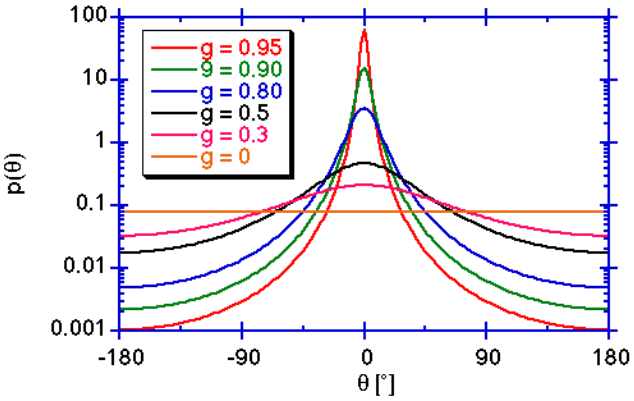
牛乳

輸送平均自由行程

頻繁に散乱される場合（$\mu_a \ll \mu_s$）を考える。

散乱長: $\ell_s = \dfrac{1}{\mu_s}$

平均自由行程: $\ell^* = \dfrac{1}{\mu_a + \mu_s(1-g)}$



$$g = \int_{\mathbb{S}^2} (\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}}')\, f(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}')\, d\hat{\mathbf{s}}'$$

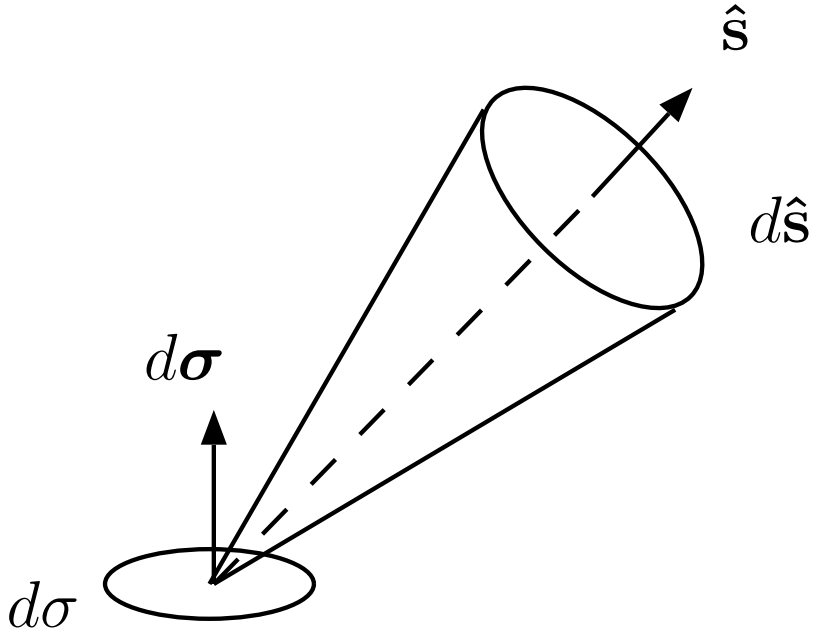
等方散乱 $=$ $g = 0$ $\Rightarrow$ $\ell^* < \ell_s$

前方散乱 $=$ $0 \ll g < 1$ $\Rightarrow$ $\ell^* \gg \ell_s$

生体組織では $\ell^* \gg \ell_s$

光強度

$I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}, t)$ ＝ 位置 $\mathbf{r}$ $(\in \mathbb{R}^3)$ 時刻 t で $\hat{\mathbf{s}}$ $(\in \mathbb{S}^2)$ 方向の、
単位面積当り単位時間当りの輻射



輻射エネルギー $= I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}, t)(d\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{s}})d\hat{\mathbf{s}}dt$

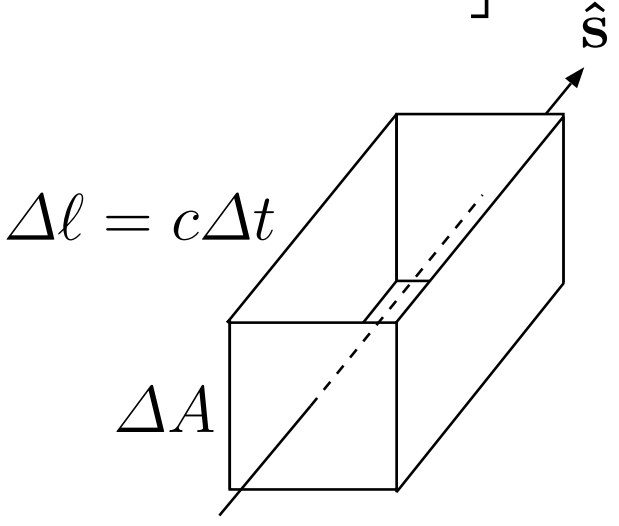
エネルギー輸送

断面積 ΔA で奥行き $\Delta\ell = c\Delta t$ (c は物質中の光速度) の微小直方体

$$I(\mathbf{r} + \Delta\ell\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}, t + \Delta t)\Delta A\Delta t = I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}, t)\Delta A\Delta t - \text{散乱と吸収}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{LHS} &= \left[I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}, t + \Delta t) + \Delta\ell\hat{\mathbf{s}} \cdot \nabla I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}, t + \Delta t)\right] \Delta A\Delta t \\
&= \left[I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}, t) + \Delta t\frac{\partial I}{\partial t}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}, t) + \Delta\ell\hat{\mathbf{s}} \cdot \nabla I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}, t)\right] \Delta A\Delta t
\end{aligned}$$

$$\frac{\Delta t}{\Delta\ell}\frac{\partial I}{\partial t} + \hat{\mathbf{s}} \cdot \nabla I = -\frac{\text{散乱と吸収}}{\Delta A\Delta\ell\Delta t}$$



光の吸収と散乱

吸収

$$\mu_a I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}})$$

散乱

$\hat{\mathbf{s}}$ から別方向へ　$-$　別方向から $\hat{\mathbf{s}}$ へ

$$
\begin{aligned}
&= \mu_s \int_{\mathbb{S}^2} f(\hat{\mathbf{s}}', \hat{\mathbf{s}}) I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}})\, d\hat{\mathbf{s}}' - \mu_s \int_{\mathbb{S}^2} f(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}') I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}')\, d\hat{\mathbf{s}}' \\
&= \mu_s I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) - \mu_s \int_{\mathbb{S}^2} f(\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{s}}') I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}')\, d\hat{\mathbf{s}}'
\end{aligned}
$$

輻射輸送方程式

微小直方体でのエネルギーバランス

$$\frac{1}{c}\frac{\partial I(\mathbf{r},\hat{\mathbf{s}},t)}{\partial t} + \hat{\mathbf{s}}\cdot\nabla I(\mathbf{r},\hat{\mathbf{s}},t) + (\mu_a+\mu_s)I(\mathbf{r},\hat{\mathbf{s}},t)$$
$$= \mu_s \int_{\mathbb{S}^2} f(\hat{\mathbf{s}},\hat{\mathbf{s}}')I(\mathbf{r},\hat{\mathbf{s}}',t)\,d\hat{\mathbf{s}}' + S(\mathbf{r},\hat{\mathbf{s}},t)$$

$$S(\mathbf{r},\hat{\mathbf{s}},t) = \text{光源}$$

$\Leftarrow$　輻射輸送方程式＝線形ボルツマン方程式

１階の微分方程式だが積分項があり変数の数は６つ $(x, y, z, \theta, \varphi, t)$

様々な場面で登場

- ランダム媒質中の光
- 海洋、流氷
- 原子炉中の中性子やガンマ線
- 地震波

マクスウェル方程式から輻射輸送方程式を導出する試み

- 摂動論
- 均質化法

拡散近似

$\mu_a \ll \mu_s$ でしかも $\mathbf{r}$ が境界や光源から遠く離れているときに

$$u(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c}\int_{\mathbb{S}^2} I(\mathbf{r},\hat{\mathbf{s}},t)\,d\hat{\mathbf{s}}$$

は拡散方程式に従う。

$$\frac{\partial u(\mathbf{r},t)}{\partial t} - \nabla\cdot(D\nabla)u(\mathbf{r},t) + c\mu_a u(\mathbf{r},t) = S_{\mathrm{DA}}(\mathbf{r},t)$$

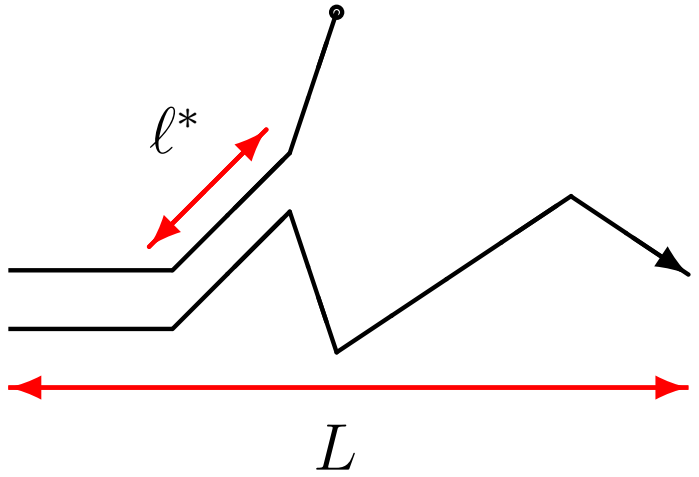
$$D = \frac{c\ell^*}{3}$$

階層

ミクロ　　メソ　　マクロ

マクスウェル $\xrightarrow[\lambda \ll \ell^*]{}$ 輻射輸送 $\xrightarrow[\ell^* \ll L]{}$ 拡散

λ: 光の波長
L: 系のサイズ



今日主に使う式

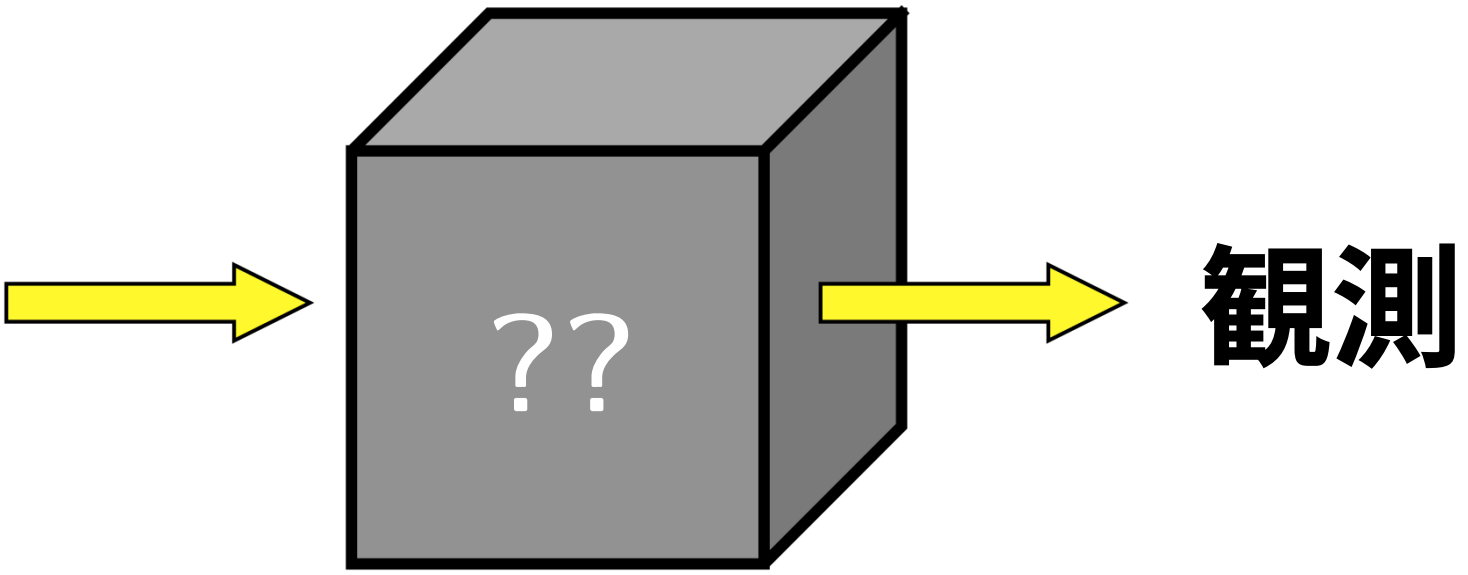
時間に依存しない輻射輸送方程式を考える。また、
不純物は球対称で散乱は相対的な角度だけに依るとする。

$$\hat{\mathbf{s}} \cdot \nabla I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) + \mu_t I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) = \mu_s \int_{\mathbb{S}^2} f(\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}}') I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}')\, d\hat{\mathbf{s}}' + S(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}})$$

全減衰：　$\mu_t = \mu_a + \mu_s$

１階の微分方程式だが積分項があり変数の数は５つ $(x, y, z, \theta, \varphi)$

逆問題



逆輸送問題 1

$$\text{境界での } I(\mathbf{r},\hat{\mathbf{s}}) \quad \Rightarrow \quad \mu_a,\ \mu_s,\ f$$

つまり、

$$I|_{\Gamma_+} \quad \Rightarrow \quad \mu_a$$

$\Gamma_\pm = \{(\mathbf{r},\hat{\mathbf{s}}) \in \partial\Omega \times \mathbb{S}^2; \pm\hat{\mathbf{s}}\cdot\hat{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{r}) > 0\}$、$\hat{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{r})$ は $\mathbf{r}$ での外向き単位法線ベクトル

$\mu_t = \mu_a + \mu_s$ で

$$\hat{\mathbf{s}}\cdot\nabla I(\mathbf{r},\hat{\mathbf{s}}) + \mu_t I(\mathbf{r},\hat{\mathbf{s}}) = \mu_s \int_{\mathbb{S}^2} f(\hat{\mathbf{s}}\cdot\hat{\mathbf{s}}') I(\mathbf{r},\hat{\mathbf{s}}')\, d\hat{\mathbf{s}}' + S(\mathbf{r},\hat{\mathbf{s}})$$

逆輸送問題 2

方程式は線形。つまり、与えられた μ_a に対して

（順問題）　$\mu_a \quad \mapsto \quad$ 境界の出射光 $I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}})$

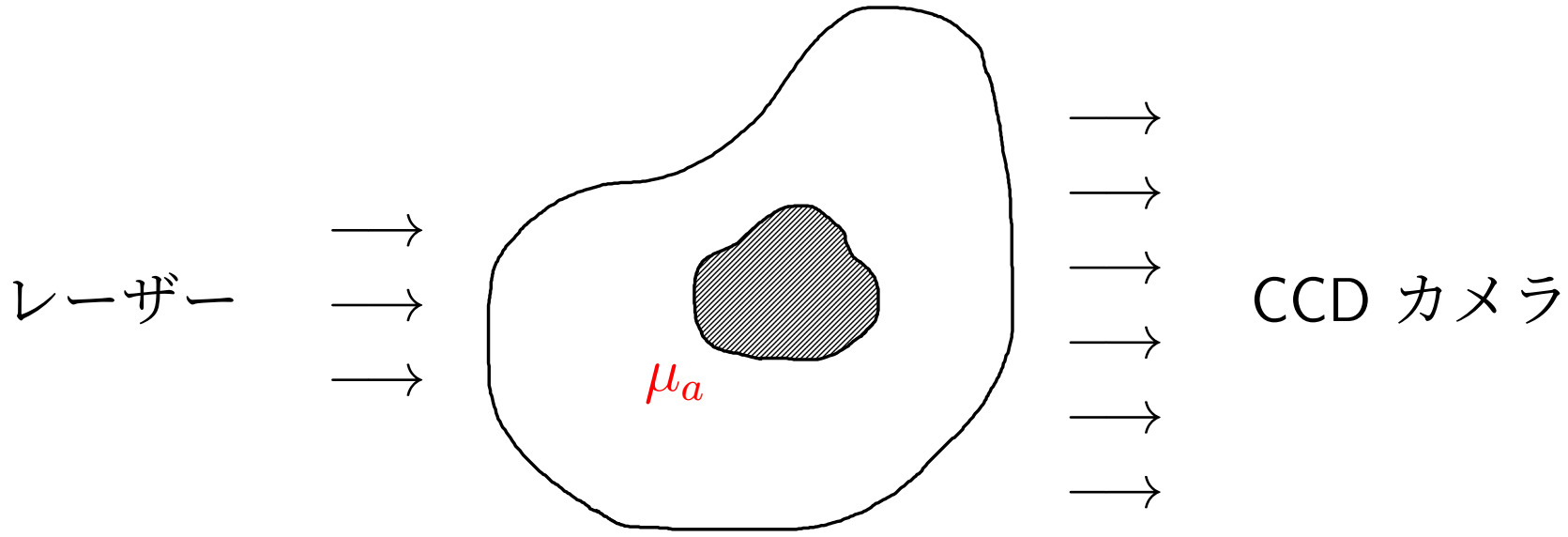
は線形。しかし、μ_a については非線形。つまり

（逆問題）　境界の出射光 $I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) \quad \mapsto \quad \mu_a$

は非線形になる。

しかも、境界の I の微小変化に対して、求まる μ_a は大きく変化する (ill-posed)

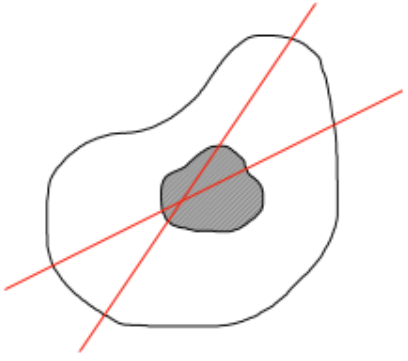
光トモグラフィー



CCD カメラ（測定データ） $\Longrightarrow$ μ_a

X線CT vs 光トモグラフィー

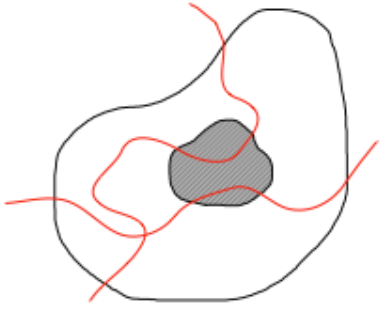
CT



X-rays

- 吸収

Optical Tomography

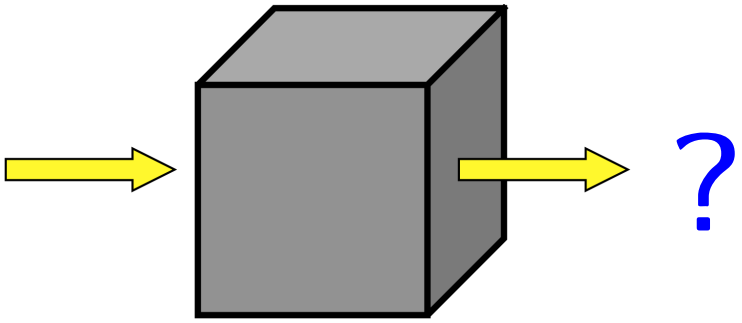


infrared light

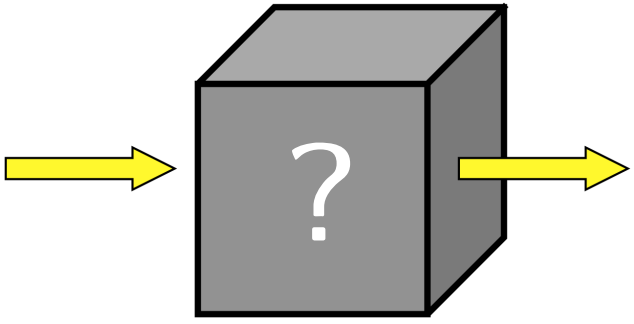
- 吸収
- 散乱

逆問題の理論

順問題：



逆問題：



- 存在（実験）
- 一意性
- 安定性
- 復元

光トモグラフィーは**不安定**

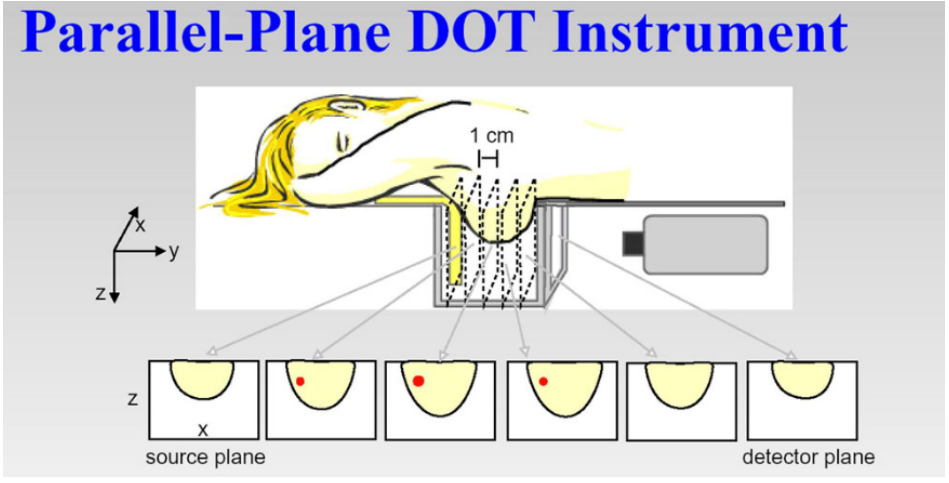
拡散方程式 vs 輻射輸送方程式

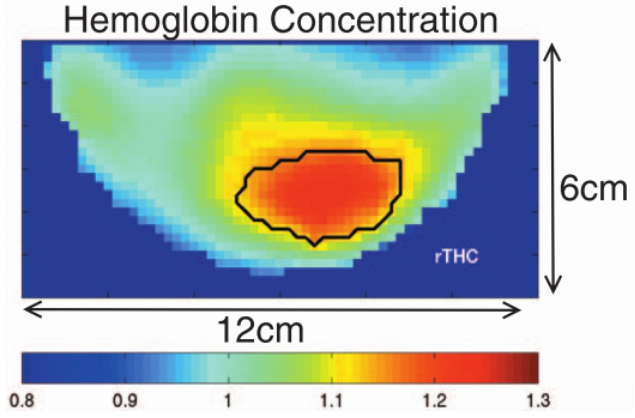
拡散光トモグラフィー： 実験あり
輸送光トモグラフィー： （基本的に）未知

拡散光トモグラフィーによる乳がん検査

Penn System

http://www.physics.upenn.edu/yodhlab/

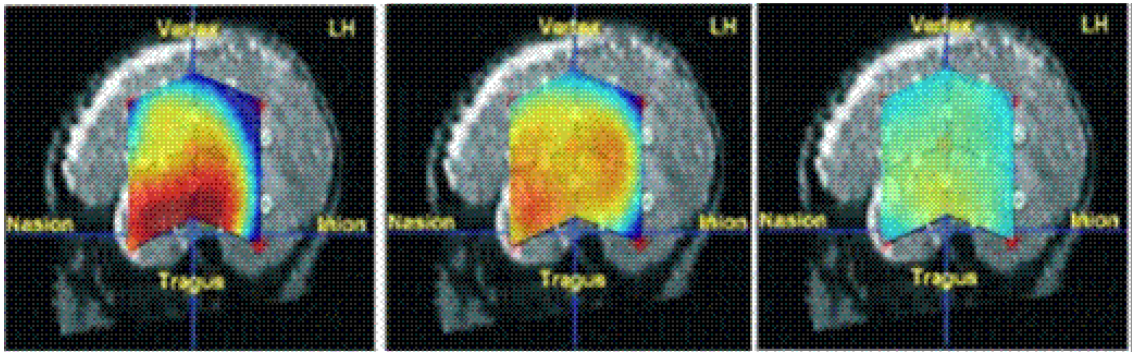




Choe, et al. (2005)

拡散光トモグラフィーによる脳機能計測

生後２ヶ月の幼児に母親が子供向けの本を読み聞かせる。



normal speech　　reverse　　none

Hitachi, Ltd. (2003)

医用イメージング

機能	解剖
Optical Tomography	CT (Computed Tomography) MRI

OT: tissue oxygenation ($\mathrm{Hb}/\mathrm{HbO_2}$)
CT: 骨
MRI: 軟組織

OT: 安全、低価格

医用イメージングの歴史

- X 線 Röntgen (1895)
  [1901 年ノーベル物理学賞]
- 超音波 水中ソナー検出 (1912)、医用超音波 (1940 年代後半)
- CT Cormack (1963) and Hounsfield (1971)
  [1979 年ノーベル生理・医学賞]
- MRI Lauterbur and Mansfield (1973)
  [2003 年ノーベル生理・医学賞]
- 光トモグラフィー 1990 年代初頭から

Part I

順問題

拡散近似の破綻

媒質が薄い、境界付近、光源付近、吸収 μ_a が大きい、
場合には拡散近似が正当化できない

マクロ領域　⇒　メソ領域

拡散方程式　⇒　輻射輸送方程式

輻射輸送方程式を解く方法

解析的に解ける場合

- １次元（z だけに依存）
- 等方散乱 $(p = \frac{1}{4\pi})$ in $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$

数値的手法

- モンテカルロ
- discrete ordinates
- P_N
- 有限要素法

逆問題のために、できるだけ解析的に解きたい！

1 次元

$\bar{\mu}_t$ と $\bar{\mu}_s$ は定数とする。

$$\cos\theta \frac{\partial I(z,\hat{\mathbf{s}})}{\partial z} + \bar{\mu}_t I(z,\hat{\mathbf{s}}) = \bar{\mu}_s \int_{\mathbb{S}^2} f(\hat{\mathbf{s}}\cdot\hat{\mathbf{s}}') I(z,\hat{\mathbf{s}}')\, d\hat{\mathbf{s}}' + S(z,\hat{\mathbf{s}})$$

解 $I(z,\hat{\mathbf{s}})$ は（初等関数で書ける）固有モードの重ねあわせで与えられる

$$I(z,\hat{\mathbf{s}}) = \sum_{\nu} c_\nu \phi_\nu(\hat{\mathbf{s}}) e^{-z/\nu}$$

係数 c_ν は境界条件と S から決まる

Case (1960)
Mika (1961), McCormick and Kuščer (1966)

3次元への拡張の試み

"Although there have been many attempts to extend these methods (the integral transform and singular eigenfunction methods) to two- and three-dimensional problems, these extensions have usually encountered extreme mathematical complexity and have met with only marginal success."

[Duderstadt-Martin, *Transport Theory* (1979), p. 122]

M. M. R. Williams, J. Math. Phys. (1968)

A. G. Gibbs, J. Math. Phys. (1969)

G. Garrettson and A. Leonard, J. Math. Phys. (1970)

K. M. Case and R. D. Hazeltine, J. Math. Phys. (1970)

C. J. Cannon, J. Quant. Spec. Rad. Trans. (1973)

G. C. Pomraning, Ann. Nucl. Energy (1996)

回転座標系の方法

$$I_\nu(z,\hat{\mathbf{s}}) = \phi_\nu(\hat{\mathbf{s}})e^{-z/\nu} \quad \Rightarrow \quad I_\nu(\mathbf{r},\hat{\mathbf{s}}) = \phi_\nu(\hat{\mathbf{s}}(\hat{\mathbf{k}}))e^{-\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{k}}/\nu}$$

$$\hat{\mathbf{s}}(\hat{\mathbf{k}}) = \begin{pmatrix} \sin\theta(\hat{\mathbf{k}})\cos\varphi(\hat{\mathbf{k}}) \\ \sin\theta(\hat{\mathbf{k}})\sin\varphi(\hat{\mathbf{k}}) \\ \cos\theta(\hat{\mathbf{k}}) \end{pmatrix}, \qquad \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = 1$$

$\theta(\hat{\mathbf{k}})$ と $\varphi(\hat{\mathbf{k}})$ は、z 軸が $\hat{\mathbf{k}}$ 方向を向く座標系で測った仰角と方位角。

cf., V. A. Markel (2004): $\quad Y_{lm}(\hat{\mathbf{s}}) \quad \Rightarrow \quad Y_{lm}(\hat{\mathbf{s}};\hat{\mathbf{k}})$
M. M., G. Y. Panasyuk, J. C. Schotland, and V. A. Markel (2010)

3次元→1次元

$$\hat{\mathbf{s}}\cdot\nabla\phi_\nu(\hat{\mathbf{s}}(\hat{\mathbf{k}}))e^{-\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{k}}/\nu} = -\frac{\hat{\mathbf{s}}\cdot\hat{\mathbf{k}}}{\nu}\phi_\nu(\hat{\mathbf{s}}(\hat{\mathbf{k}}))e^{-\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{k}}/\nu}$$

$$= -\frac{\cos\theta(\hat{\mathbf{k}})}{\nu}\phi_\nu(\hat{\mathbf{s}}(\hat{\mathbf{k}}))e^{-\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{k}}/\nu}$$

座標を回転： $\hat{\mathbf{k}}\to\hat{\mathbf{z}}$

$$\Rightarrow -\frac{\cos\theta}{\nu}\phi_\nu(\hat{\mathbf{s}})e^{-z/\nu}$$

$$= \cos\theta\frac{\partial}{\partial z}\phi_\nu(\hat{\mathbf{s}})e^{-z/\nu}$$

3 次元での解析解

Theorem

Let $I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}})$ be the solution to the RTE in $\mathbb{R}^3$. We assume $f(\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}}') = \sum_{l=0}^{N} \sum_{m=-l}^{l} f_l Y_{lm}(\hat{\mathbf{s}}) \overline{Y_{lm}(\hat{\mathbf{s}}')}$. Then there exists a set of eigenmodes $I_\nu^m(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}; \mathbf{q})$ such that

$$I(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) = \sum_{m=-N}^{N} \sum_{\nu} \int_{\mathbb{R}^2} c_\nu^m(\mathbf{q}) I_\nu^m(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}; \mathbf{q}) \, d\mathbf{q},$$

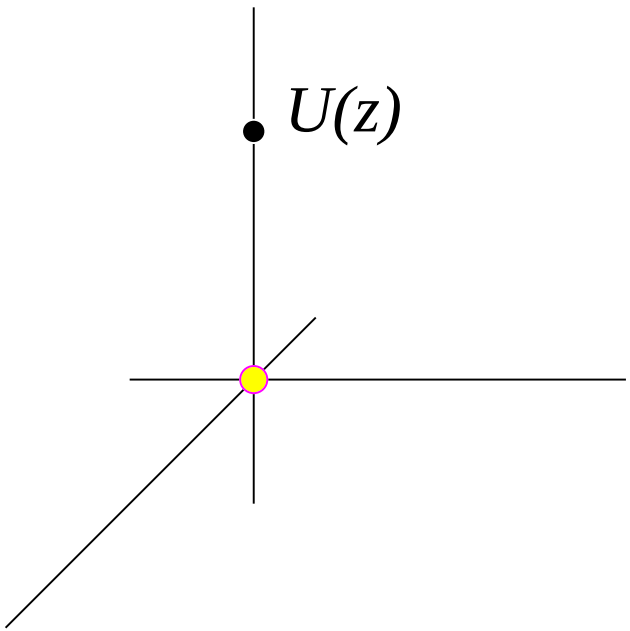
where $c_\nu^m(\mathbf{q})$ are determined by the source term $S(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}})$.

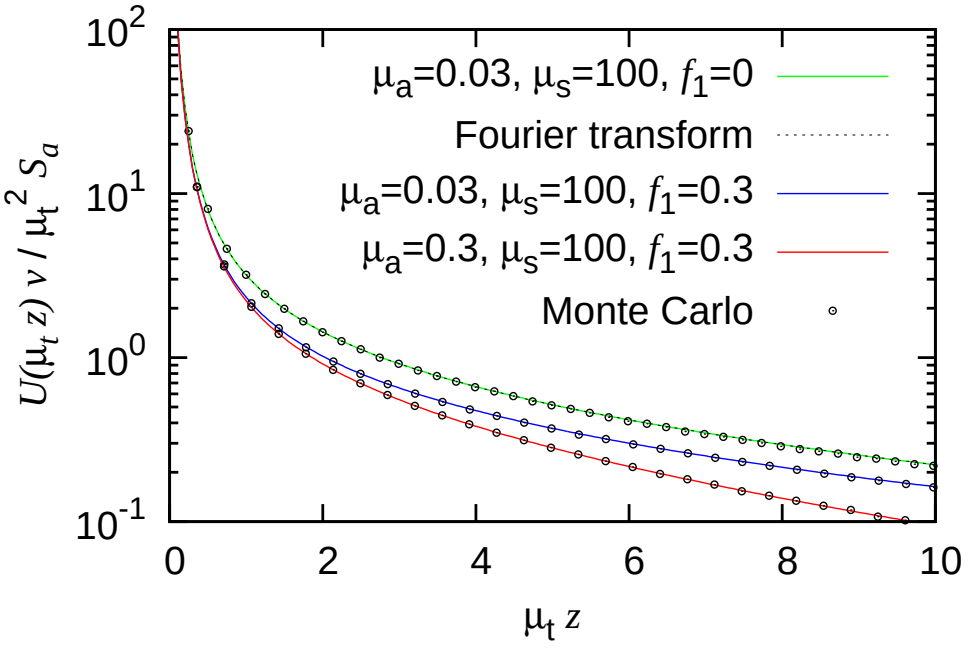
M.M. (2014)

エネルギー密度

エネルギー密度の計算

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int_{\mathbb{S}^2} I(\mathbf{r},\hat{\mathbf{s}})\, d\hat{\mathbf{s}}$$





Part II

逆問題

出射光→吸収

一般的に時間に依存する場合を考える。
ランダム媒質はなめらかな境界 $\partial\Omega$ で囲まれた有界な領域 Ω にあるとする。

（逆問題）　　外向きの出射光 $I|_{\Gamma_+\times(0,T)} = \mathcal{A} I_{\Gamma_-\times(0,T)}$　　$\rightarrow$　　μ_a

ここで

$$\Gamma_\pm = \left\{(\mathbf{r},\hat{\mathbf{s}}) \in \partial\Omega \times \mathbb{S}^2; \pm\hat{\mathbf{s}}\cdot\boldsymbol{\hat{\nu}}(\mathbf{r}) > 0\right\}$$

$\boldsymbol{\hat{\nu}}(\mathbf{r})$ は $\mathbf{r}$ での外向き単位法線ベクトル

$\mathcal{A}$ は反射能演算子と呼ばれる
[反射能＝反射光／入射光 = albedo]

$\mathcal{A}$ は線形だが、$I|_{\Gamma_+\times(0,T)} \mapsto \mu_a$ は非線形

一意性と安定性

一意性

Choulli-Stefanov (1996, 1999), Stefanov (2003), Stefanov-Tamasan (2009), Bal-Jollivet (2009), Klibanov-Pamyatnykh (2006),...

安定性

Romanov (1997, 1998), Wang (1999), Tamasan (2002), Bal-Jollivet (2008, 2009, 2010), Bal (2008), Bal-Langmore-Monard (2008), Stefanov-Uhlmann (2003), Langmore (2008), McDowall-Stefanov-Tamasan (2010),...

大域リプシッツ安定性

これまで、$\|\mathcal{A}\|$ に対する Hölder stability

$\Rightarrow$　一つの境界値に対する Global Lipschitz stability

Theorem

$I^k = I(\mu_t^k)(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}, t)$ $(k = 1, 2)$ は輻射輸送方程式の解。ある $\boldsymbol{\gamma} \in \mathbb{R}^d$, $\neq 0$ について $\overline{V} \subset \{\hat{\mathbf{s}};\, \boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{s}} > 0\}$ となるように V をとる。I^k は十分なめらかで $\|\mu_t^k\|_{L^\infty(\Omega \times V)}$、$\|\mu_s\|_{L^\infty(\Omega \times V)} \leq M$ とする。T $(t \in (0, T))$ は十分に大きく、初期条件は $(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) \in \overline{\Omega \times V}$ で正、$a(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{s}}) > 0$ とする。以下の定数 $C = C(M) > 0$ が存在する。

$$\|\mu_t^1 - \mu_t^2\|_{L^2(\Omega \times V)} \leq C \left(\int_0^T \int_{\Gamma_+} (\hat{\boldsymbol{\nu}}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{s}}) |\partial_t (I^1 - I^2)|^2 dS d\hat{\mathbf{s}} dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

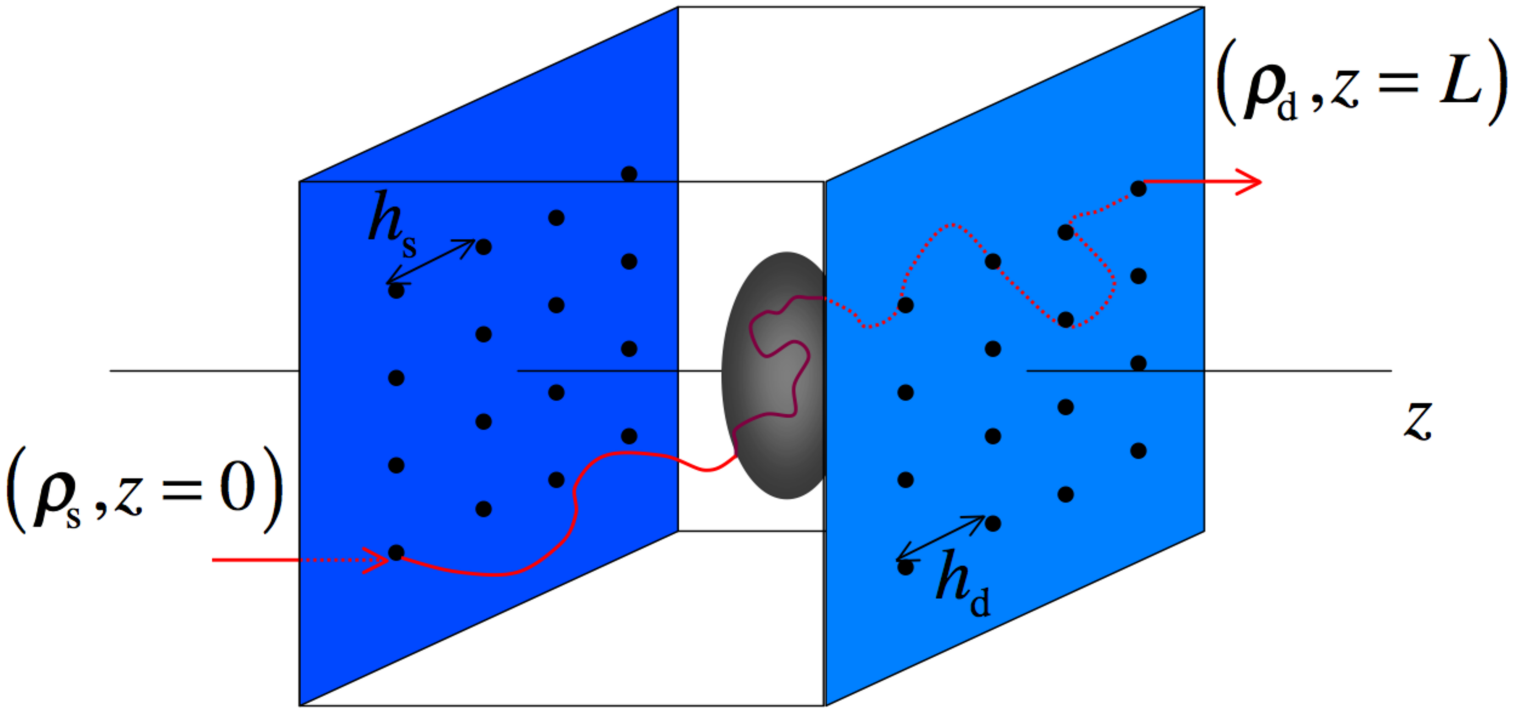
M.M. and M. Yamamoto (2014)

輸送光トモグラフィーの復元アルゴリズム

- Dorn (1998)
- Klose and Hielscher (1999)
- Wright, Schweiger, and Arridge (2007)
- Tarvainen, Vauhkonen, and Arridge (2008)
- Gonzalez-Rodriguez and Kim (2009)
- ...

非接触光トモグラフィー

ここからはまた時間に依存しない場合



Schotland and Markel (2007)

輸送光トモグラフィー

$\eta > -1$, $\operatorname{supp}\eta \subseteq B_a \subseteq \Omega$ とする。

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{s}}\cdot\nabla I(\mathbf{r},\hat{\mathbf{s}}) + \bar{\mu}_t[1+\eta(\mathbf{r})]I(\mathbf{r},\hat{\mathbf{s}}) &= \bar{\mu}_s \int_{\mathbb{S}^2} f(\hat{\mathbf{s}}\cdot\hat{\mathbf{s}}')I(\mathbf{r},\hat{\mathbf{s}}')\,d\hat{\mathbf{s}}' \\
\hat{\mathbf{s}}\cdot\nabla I_0(\mathbf{r},\hat{\mathbf{s}}) + \bar{\mu}_t I_0(\mathbf{r},\hat{\mathbf{s}}) &= \bar{\mu}_s \int_{\mathbb{S}^2} f(\hat{\mathbf{s}}\cdot\hat{\mathbf{s}}')I_0(\mathbf{r},\hat{\mathbf{s}}')\,d\hat{\mathbf{s}}'
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I(\mathbf{r},\hat{\mathbf{s}}) &= I_0(\mathbf{r},\hat{\mathbf{s}}) + \bar{\mu}_t \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{r},\hat{\mathbf{s}};\mathbf{r}',\hat{\mathbf{s}}')\eta(\mathbf{r}')I(\mathbf{r}',\hat{\mathbf{s}}')\,d\mathbf{r}'d\hat{\mathbf{s}}' \\
&= I_0(\mathbf{r},\hat{\mathbf{s}}) + \bar{\mu}_t \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{r},\hat{\mathbf{s}};\mathbf{r}',\hat{\mathbf{s}}')\eta(\mathbf{r}')I_0(\mathbf{r}',\hat{\mathbf{s}}')\,d\mathbf{r}'d\hat{\mathbf{s}}' + \dots
\end{aligned}$$

境界で $(I_0 - I)|_{\Gamma_+}$ を測定　$\Rightarrow$　未知の η を復元

ボルン級数と逆ボルン級数

データ：$\Phi = (I_0 - I)|_{\Gamma_+}$ とする。

ボルン級数：

$$\Phi = K_1\eta + K_2\eta \otimes \eta + K_3\eta \otimes \eta \otimes \eta + \dots$$

逆ボルン級数：

$$\eta = \mathcal{K}_1\Phi + \mathcal{K}_2\Phi \otimes \Phi + \mathcal{K}_3\Phi \otimes \Phi \otimes \Phi + \dots$$

Theorem

$\mathcal{K}_j : L^1(\Gamma_+ \times \cdots \times \Gamma_+) \to L^\infty(B_a)$ $(j = 1, 2, \dots)$であり、級数は $\|\mathcal{K}_1\|$ と $\|\mathcal{K}_1\Phi\|_{L^\infty(B_a)}$ が十分に小さいときに収束する。

ボルン近似

$$
\begin{aligned}
\eta &= \mathcal{K}_1\Phi + \mathcal{K}_2\Phi\otimes\Phi + \ldots \\
&= K_1^+\Phi + \left[-\mathcal{K}_1K_2\mathcal{K}_1\otimes\mathcal{K}_1\right]\Phi\otimes\Phi + \ldots \\
&\approx K_1^+\Phi
\end{aligned}
$$

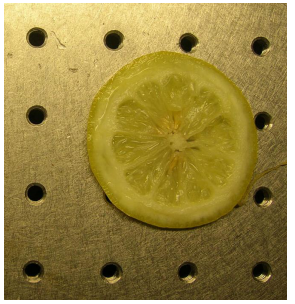
ill-posed $\Rightarrow$ K_1の inverse は存在しない

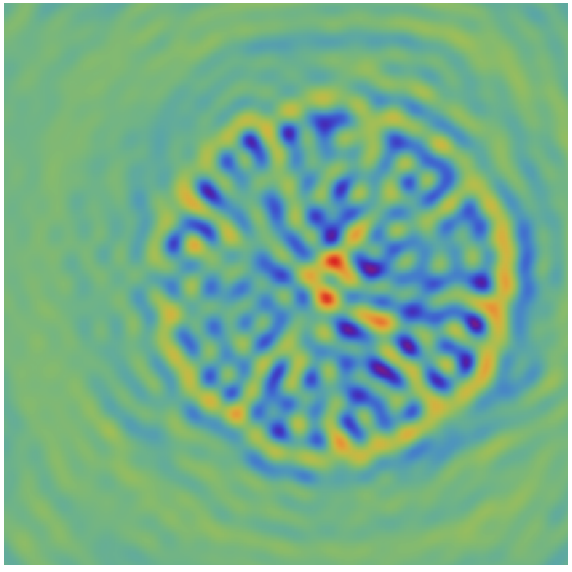
$\Rightarrow$ $\mathcal{K}_1 = K_1^+$は pseudoinverse

低周波フィルターのようなもの

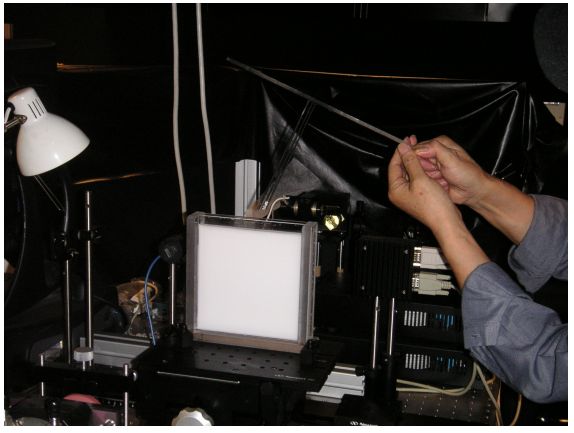
復元画像

- 高速アルゴリズム：ν を求める対角化と係数を求める連立方程式、２次元逆フーリエ変換
- 大きなデータ：10^8 程度の光源と検出器の組は容易（cf., 10^4）

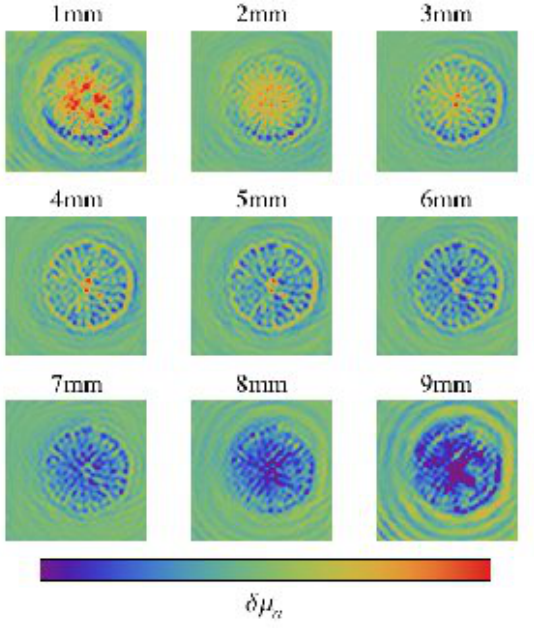


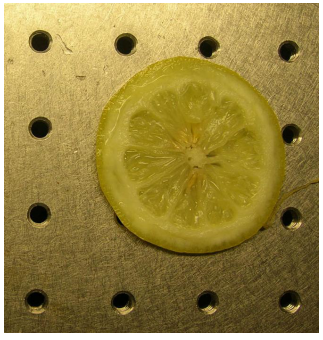


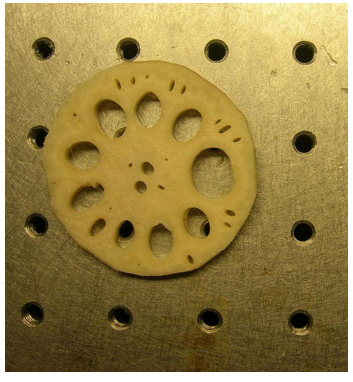
レモン片の復元画像

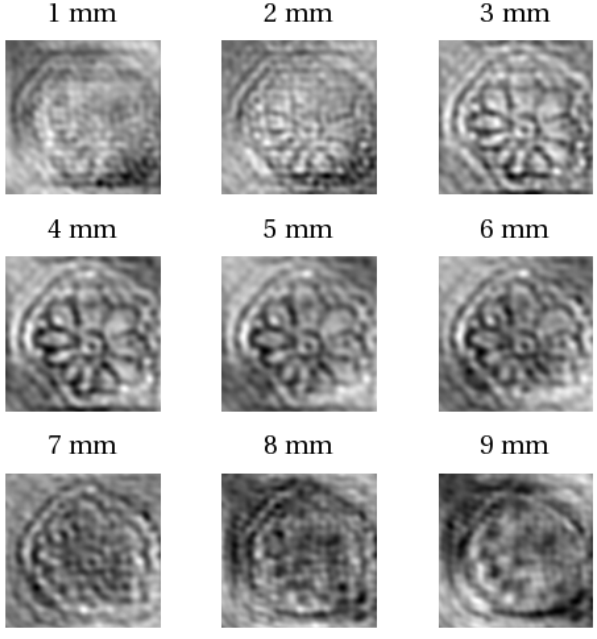


レモンとレンコン

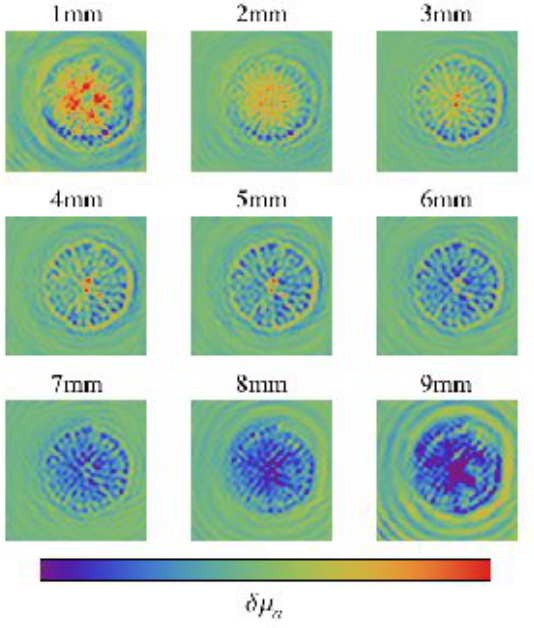

1mm
2mm
3mm
4mm
5mm
6mm
7mm
8mm
9mm
$\delta\mu_a$

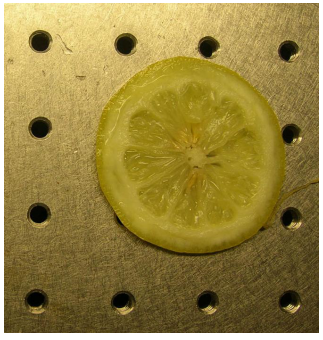


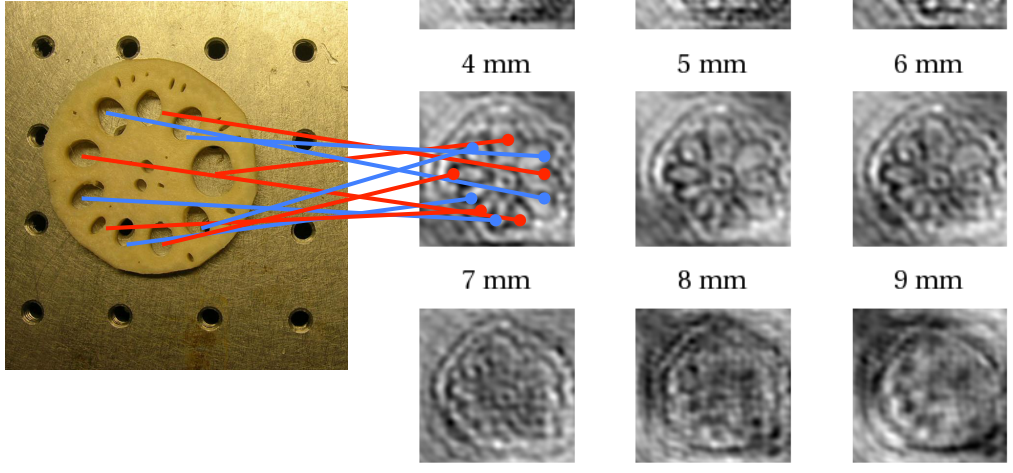



1 mm
2 mm
3 mm
4 mm
5 mm
6 mm
7 mm
8 mm
9 mm

レモンとレンコン


1mm
2mm
3mm
4mm
5mm
6mm
7mm
8mm
9mm
$\delta\mu_a$




1 mm
2 mm
3 mm
4 mm
5 mm
6 mm
7 mm
8 mm
9 mm

さらに発展させるには

- 境界がある場合のグリーン関数の解析解
  →連立方程式を解かずに係数が求まる
- 非線形項を使ったηの復元
  →トポロジカル縮約＝各項で１つのダイヤグラムだけが寄与
- μ_tとμ_sの同時復元
- 偏光を考慮
  →ベクトル輻射輸送方程式