# ２次元整数格子上のランダムウォークの局所時間と対応するガウス自由場の関係性について

**Izumi Okada ( Tokyo institute of Technology)**
HP: http://www.math.titech.ac.jp/ izumi0201/

Jan. 28, 2017

# Main results

# Main results

**Theorem (O.)**

$0 < \alpha, \beta < 1$, $j \in \mathbb{N}$ に対して、次を満たす：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log E[|\{(x_1, ..., x_j) \text{ are } \alpha\text{-favorite points} : d(x_i, x_l) \le n^{\beta}\}|]}{\log n} = \hat{\rho}_j(\alpha, \beta).$$

ただし、

$$\hat{\rho}_j(\alpha,\beta) = \begin{cases} 2 + 2(j-1)\beta - \frac{2j\alpha}{(1-\beta)(j-1)+1} & (\beta \le 1 + \frac{1-\sqrt{j\alpha}}{j-1}) \\ 2(j + 1 - 2\sqrt{j\alpha}) & (\beta \ge 1 + \frac{1-\sqrt{j\alpha}}{j-1}). \end{cases}$$

# Main results

**Theorem (O.)**

$0 < \alpha, \beta < 1$, $j \in \mathbb{N}$ に対して、次を満たす：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log E[|\{(x_1, ..., x_j) \text{ are } \alpha\text{-favorite points} : d(x_i, x_l) \le n^{\beta}\}|]}{\log n} = \hat{\rho}_j(\alpha, \beta).$$

ただし、

$$\hat{\rho}_j(\alpha,\beta) = \begin{cases} 2 + 2(j-1)\beta - \frac{2j\alpha}{(1-\beta)(j-1)+1} & (\beta \le 1 + \frac{1-\sqrt{j\alpha}}{j-1}) \\ 2(j+1-2\sqrt{j\alpha}) & (\beta \ge 1 + \frac{1-\sqrt{j\alpha}}{j-1}). \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\alpha$-high points に対しても、同様の評価が成立する.

# Main results

**Theorem (O.)**

$0 < \alpha, \beta < 1$, $j \in \mathbb{N}$ に対して、確率 1 で次を満たす：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log |\{(x_1, \ldots, x_j) \text{ are } \alpha\text{-favorite points} : d(x_i, x_l) \le n^{\beta}\}|}{\log n} = \rho_j(\alpha, \beta).$$

ただし、

$$\rho_j(\alpha,\beta) = \begin{cases} 2 + 2(j-1)\beta - \frac{2j\alpha}{(1-\beta)(j-1)+1} & (\beta \le \frac{j}{j-1}(1-\sqrt{\alpha})) \\ 4j(1-\sqrt{\alpha}) - 2j(1-\sqrt{\alpha})^2/\beta & (\beta \ge \frac{j}{j-1}(1-\sqrt{\alpha})). \end{cases}$$

# Main results

**Theorem (O.)**

$0 < \alpha, \beta < 1$, $j \in \mathbb{N}$ に対して、確率 1 で次を満たす：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log |\{(x_1, ..., x_j) \text{ are } \alpha\text{-favorite points} : d(x_i, x_l) \le n^\beta\}|}{\log n} = \rho_j(\alpha,\beta).$$

ただし、

$$\rho_j(\alpha,\beta) = \begin{cases} 2 + 2(j-1)\beta - \frac{2j\alpha}{(1-\beta)(j-1)+1} & (\beta \le \frac{j}{j-1}(1-\sqrt{\alpha})) \\ 4j(1-\sqrt{\alpha}) - 2j(1-\sqrt{\alpha})^2/\beta & (\beta \ge \frac{j}{j-1}(1-\sqrt{\alpha})). \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\alpha$-high points に対しても、同様の評価が成立する.

favorite points, high points

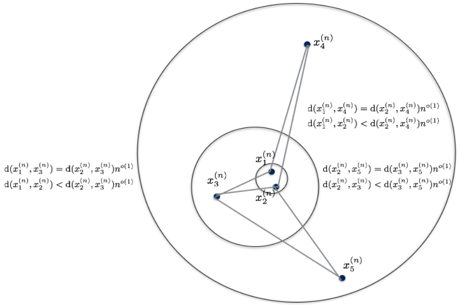
$j = 2$ のとき、

$$E[|\{(x,y) \text{ are } \alpha\text{-favorite points} : d(x,y) \le n^{\beta}\}|]$$
$$= \sum_{d(x,y)\le n^{\beta}} P(x,y \text{ are } \alpha\text{-favorite points})$$
$$= \sum_{d(x,y)\le n^{\beta}} n^{-4\alpha \log n/(2\log n - \log^{+} d(x,y)) + o(1)}.$$

$j \in \mathbb{N}$ のとき、

$$E[|\{(x_1,\dots,x_j) \text{ are } \alpha\text{-favorite points} : d(x_i,x_l) \le n^{\beta} \quad \forall i,l \le j\}|]$$
$$= \sum_{d(x_i,x_l)\le n^{\beta}} P(x_1,\dots,x_j \text{ are } \alpha\text{-favorite points}).$$

# 主定理の証明




証明の手順：

- $P(x_1, ..., x_j$ are $\alpha$-favorite points$)$ の計算
- $x_1, ..., x_j$ の様々な配置に対する計算

# 主定理の証明

favorite points, high points

## Lemma

$j \in \mathbb{N}$ を固定する. $n \to \infty$ のとき、$x_1, ..., x_j \in \mathbb{Z}_n^2$ で一様に次を満たす：

$$P(x_1, ..., x_j \text{ are } \alpha\text{-F.P.}) \approx \exp\left\{ -2\alpha\chi\left(\left(\frac{\pi G_n(x_i, x_l)}{2\log n}\right)_{1\le i,l\le j}\right)\log n\right\}.$$

ただし、$\chi(A)$ は $A^{-1}$ の成分和で、$G_n$ は *Green's function*.

$\left(\frac{\pi G_n(x_i,x_l)}{2\log n}\right)_{1\le i,l\le j} \sim \left(\frac{\log n - \log^+ d(x_i,x_l)}{\log n}\right)_{1\le i,l\le j}$ は、ある意味次の行列に近づく：

$$\mathcal{M}_j := \{(a_{i,l})_{1\le i,l\le j} : \text{ for any } 1 \le p \ne l \le j$$
$$a_{p,p} = 1, 0 \le a_{p,l} < 1, \text{ultrametric matrix}\}.$$

# 主定理の証明 : ultrametric matrix の性質

## Lemma

任意の $A := (a_{i,l})_{1\leq i,l\leq j} \in \mathcal{M}_j$ に対して、次を満たす $B \in \mathcal{M}_g$ と $C \in \mathcal{M}_h$ と $\sigma : \{1, ..., j\} \to \{1, ..., j\}$ が存在する：$g + h = j$,

$$\left(a_{\sigma(i),\sigma(l)}\right)_{1\leq i,l\leq j} = \begin{pmatrix} B & \begin{matrix} s & s & \dots \\ \dots \end{matrix} \\ \begin{matrix} s & s & \dots \\ \dots \end{matrix} & C \end{pmatrix}$$

ただし、$s := \min_{1\leq i,l\leq j} a_{i,l}$.

## Lemma

$B' \in \mathcal{M}_g$ に対して、$\chi(B) \geq \chi(B')$ を満たすとき、次が成立する：

$$\chi\left(\begin{pmatrix} B & s\,s\cdots \\ s\,s\cdots & C \end{pmatrix}\right) \geq \chi\left(\begin{pmatrix} B' & s\,s\cdots \\ s\,s\cdots & C \end{pmatrix}\right)$$

## Proposition

*Fix* $0 < \alpha, \gamma_1, \gamma_2 < 1$, $\epsilon > 0$, $h, g \in \mathbb{N}$. *Consider* $x_1(n), ..., x_h(n)$, $w_1(n), ..., w_g(n)$, $z_1(n), ..., z_g(n)$ *with* $x_1, y_1, z_1 \in D(0, \frac{n}{2})$, $x_2, ..., x_h \in D(x_1, n^{\gamma_1})$, $w_2, ..., w_g \in D(w_1, n^{\gamma_2})$ *and* $z_2, ..., z_g \in D(z_1, n^{\gamma_2})$. *Assume*

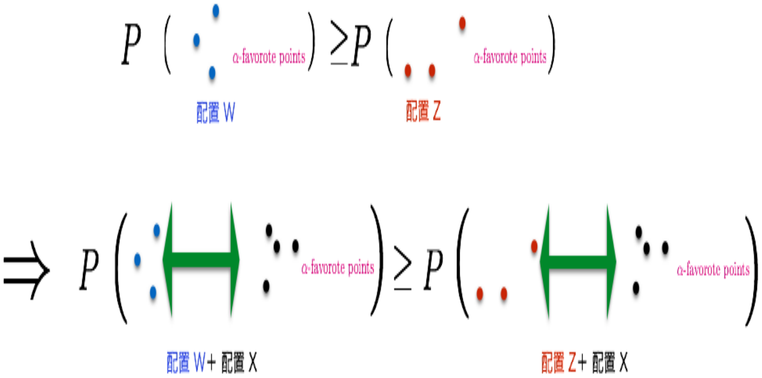
$$\underline{P(w_1, ..., w_g \text{ are } \alpha\text{-favorite points}) \geq P(z_1, ..., z_g \text{ are } \alpha\text{-favorite points})},$$

$$d(x_1, w_1) = d(x_1, z_1) \geq 4jn^{\max\{\gamma_1, \gamma_2\}}.$$

*Then, there exists* $c > 0$ *such that for any* $n \in \mathbb{N}$ *and* $x_1(n), ..., x_h(n)$, $w_1(n), ..., w_g(n)$, $z_1(n), ..., z_g(n)$,

$$\underline{P(x_1, ..., x_h, w_1, ..., w_g \text{ are } \alpha\text{-favorite points})}$$
$$\geq \underline{cn^{-\epsilon} P(x_1, ..., x_h, z_1, ..., z_g \text{ are } \alpha\text{-favorite points})}.$$

# 主定理の証明


P
α-favorote points
≥ P
α-favorote points
配置 W
配置 Z
⇒ P
α-favorote points
≥ P
α-favorote points
配置 W+ 配置 X
配置 Z+ 配置 X

# 主定理の証明：ultrametric matrix の性質

## Lemma

任意の $A := (a_{i,l})_{1 \leq i,l \leq j} \in \mathcal{M}_j$ に対して、次を満たす $B \in \mathcal{M}_g$ と $C \in \mathcal{M}_h$ と $\sigma : \{1, ..., j\} \to \{1, ..., j\}$ が存在する：$g + h = j$,

$$\left(a_{\sigma(i),\sigma(l)}\right)_{1 \leq i,l \leq j} = \begin{pmatrix} B & \begin{matrix} s\, s \ldots \\ \cdots \end{matrix} \\ \begin{matrix} s\, s \ldots \\ \cdots \end{matrix} & C \end{pmatrix}$$

ただし、$s := \min_{1 \leq i,l \leq j} a_{i,l}$.

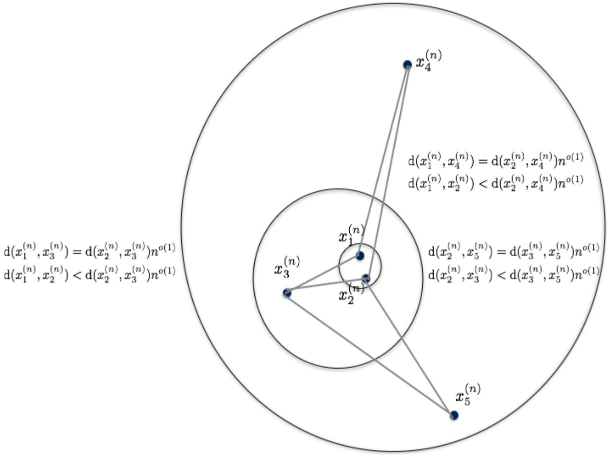
## Definition

$\Xi : \cup_{j=1}^{\infty} \mathcal{M}_j \to \mathbb{R}$ を次のように定義する：

$$\Xi(A) := \Xi(B) + \Xi(C) + (1 - s).$$

ただし、$A \in \mathcal{M}_1$ に対して、$\Xi(A) := 0$ とする.

# 主定理の証明 : ultrametric matrix の性質



### Definition

$$A_\eta := \begin{pmatrix} 1 & \eta & \eta & \cdots & \\ \eta & 1 & \eta & & \\ \eta & \eta & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

### Lemma

任意の $r \leq j-1$ に対して、

$$\min_{A \in \Xi^{-1}(\{r\})} \chi(A) = \chi\Big(A_{1-r/(j-1)}\Big).$$

# 主定理の証明：ultrametric matrix の性質

**Definition**

$$A_\eta := \begin{pmatrix} 1 & \eta & \eta & \cdots & \\ \eta & 1 & \eta & & \\ \eta & \eta & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

**Lemma**

任意の $r \le j-1$ に対して、

$$\min_{A \in \Xi^{-1}(\{r\})} \chi(A) = \chi\left(A_{1-r/(j-1)}\right).$$

$\Rightarrow$ 等距離配置で、leading term とる.

# Open problems

# Open problems

## 1 次元単純ランダムウォークの most-favorite point

$$N_n := |\{y \in \mathbb{Z} : K(n,y) = \max_{x \in \mathbb{Z}} K(n,x)\}|$$

## Known results

$$P(\sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{N_n = 2\}} = \infty) = 1$$

$$P(\sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{N_n \geq 4\}} = \infty) = 0.$$

$\Rightarrow N_n = 3$ は未解決

Thank you for your attention!