リーマン予想の紹介

小野寺一浩

千葉工業大学

2014 年 2 月 22 日 (土)
千葉工業大学「核物理×物性セミナー」

はじめに

Riemann 予想

Riemann ゼータ関数の非自明零点の実部は全て $\dfrac{1}{2}$ である

Hilbert の第 8 問題 (1900 年)

ミレニアム懸賞問題 (2000 年)

目次

素数の分布

素数

素数

2 以上の自然数で, 1 と自分自身以外に正の約数をもたない数

例: $2, 3, 5, 7, 11$

合成数: 素数でない 2 以上の自然数

例: $4 = 2^2,\ \ 6 = 2 \times 3,\ \ 8 = 2^3,\ \ 9 = 3^2,\ \ 10 = 2 \times 5,\ \ 12 = 2^2 \times 3$

例: 100 以下の素数は 25 個

1	**2**	**3**	4	**5**	6	**7**	8	9	10
11	12	**13**	14	15	16	**17**	18	**19**	20
21	22	**23**	24	25	26	27	28	**29**	30
31	32	33	34	35	36	**37**	38	39	40
41	42	**43**	44	45	46	**47**	48	49	50
51	52	**53**	54	55	56	57	58	**59**	60
61	62	63	64	65	66	**67**	68	69	70
71	72	**73**	74	75	76	77	78	**79**	80
81	82	**83**	84	85	86	87	88	**89**	90
91	92	93	94	95	96	**97**	98	99	100

素因数分解とその一意性

2 以上の自然数は素数の積として表すことができる.
その表し方は, 積の順番の違いを除いて一通りである.

例：$12 = 2 \times 2 \times 3,\ \ 20140222 = 2 \times 887 \times 11353$

$\rightarrow$ 素数 $=$ 自然数を構成する最小の要素

問題

素数は自然数の中でどのように分布しているだろうか？

定理 1 (Euclid 原論, 紀元前 3 世紀)

素数は無数に存在する

(証明)

素数 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ に対して, それ以外の素数が存在することを示す.

$$M := p_1 p_2 \cdots p_n + 1$$

とおくと, M を割り切る素数が存在する.
その一つ p を取る (例えば一番小さなものを取れば良い).
この p は $p_1, p_2, \ldots, p_n$ とは異なる.
なぜなら p は M を割り切るが, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ は M を割り切らないから.

Leonhard Euler

Euler は, 無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (s \text{ は整数})$$

を研究し, 1737 年に素数の分布に関して定量的な成果を得た.

定理 2 (Euler, 1737)

素数の逆数和は発散する:

$$\sum_{p:\text{素数}} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \cdots = \log\log\infty$$

- 素数が無数にあることの別証明
- 平方数の逆数和は収束する:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots < \infty \quad (\text{極限値は } \frac{\pi^2}{6} \text{ (Euler, 1735)})$$

$\rightarrow$ 素数は自然数の中で平方数より密に存在する

補題 1

自然数の逆数和は発散する:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots = \log \infty$$

(証明)

$$\int_1^{N+1} \frac{dx}{x} \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \leq 1 + \int_1^{N} \frac{dx}{x}$$

$$\log(N+1) \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \leq 1 + \log N$$

$$\log \infty \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \leq \log \infty$$

※ $s > 1$ のとき　$0 < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \leq 1 + \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} = 1 + \left[\frac{x^{1-s}}{1-s} \right]_1^{\infty} = \frac{s}{s-1} < \infty$

補題 2 (Euler 積)

自然数の逆数和は次の形に “素因数分解” できる！

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\prod_{p:\text{素数}}\frac{1}{1-\frac{1}{p}}$$

(証明)
$$\begin{aligned}\prod_{p:\text{素数}}\frac{1}{1-\frac{1}{p}}&=\prod_{p:\text{素数}}\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+\cdots\right)\\&=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\right)\times\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots\right)\\&\quad\times\left(1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}+\cdots\right)\times\cdots\\&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\end{aligned}$$

(定理 2 の証明) Euler 積表示より

$$\begin{aligned}\log \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \log \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} &= \sum_{p} \left\{ -\log \left(1 - \frac{1}{p}\right)\right\} \\ &= \sum_{p} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{2p^2} + \frac{1}{3p^3} + \frac{1}{4p^4} + \cdots \right) \\ &= \sum_{p} \frac{1}{p} + C\end{aligned}$$

ここで $C := \sum_{p} \left(\frac{1}{2p^2} + \frac{1}{3p^3} + \frac{1}{4p^4} + \cdots \right)$ は有限値:

$$0 < C < \sum_{p} \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p^4} + \cdots \right) = \sum_{p} \frac{1}{p(p-1)} < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1$$

従って, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \log \infty$ より

$$\log \log \infty = \sum_{p} \frac{1}{p}$$

定理 2 を今日の表記に従って書き直すと

定理 2' (Mertens, 1874)

$$\sum_{p\le x}\frac{1}{p}\sim\log\log x\quad(x\to\infty)$$

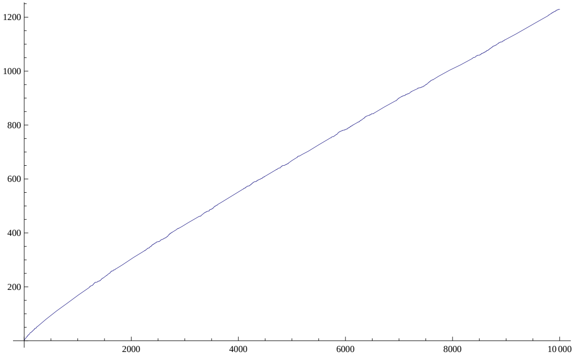
ここで，「∼」は相対誤差が $x\to\infty$ のとき 0 になることを意味する．即ち，

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sum_{p\le x}\frac{1}{p}-\log\log x}{\log\log x}=0$$

問題

正の実数 x 以下の素数の個数 $\pi(x)$ はどのくらいか？

$$\pi(1) = 0,\ \pi(2) = 1,\ \pi(3) = 2,\ \pi(4) = 2,\ \ldots,\ \pi(100) = 25,\ \ldots$$



図：$\pi(x)$ のグラフ

予想 (Gauss, 1792?)

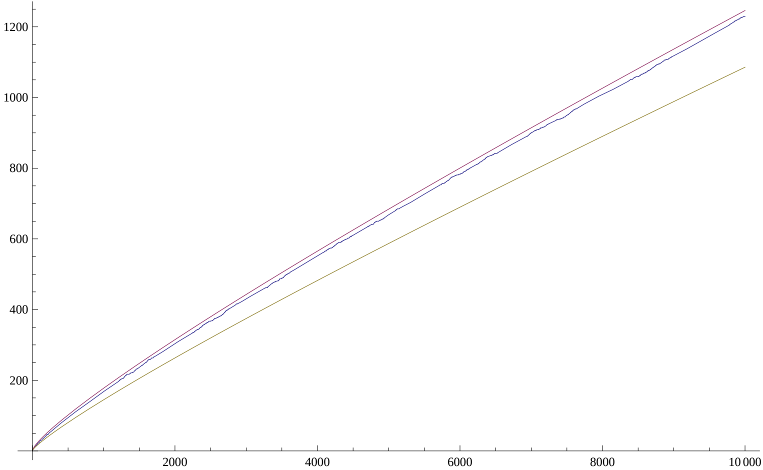
$$\pi(x) \approx \mathrm{Li}(x)$$

ここで, $\mathrm{Li}(x)$ は対数積分:

$$\mathrm{Li}(x) = PV \int_0^x \frac{dt}{\log t} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dt}{\log t} + \int_{1+\varepsilon}^x \frac{dt}{\log t} \right)$$

$\mathrm{Li}(x)$ の大きさ:

$$\begin{aligned} \mathrm{Li}(x) &= \int_2^x \frac{dt}{\log t} + const = \frac{x}{\log x} + \int_2^x \frac{dt}{(\log t)^2} + const \\ &= \cdots \\ &\approx \frac{x}{\log x} + \frac{x}{(\log x)^2} + \frac{2x}{(\log x)^3} + \cdots + \frac{(n-1)!x}{(\log x)^n} \end{aligned}$$



図：$\pi(x)$ (青), $\mathrm{Li}(x)$ (赤), $\dfrac{x}{\log x}$ (黄) のグラフ

- 1850 年頃に, Chebyshev は Euler が扱った関数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p:\text{素数}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} \quad (s>1)$$

を研究し, $\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\mathrm{Li}(x)}$ が存在すれば 1 であることを証明した.

- 1896 年に, Hadamard と de la Vallée Poussin は独立に次を示した.

定理 3 (素数定理)

$$\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x) \quad (x\to\infty)$$

証明には, Riemann の仕事が必要不可欠であった.

Riemann の素数公式

Bernhard Riemann

Riemann は, 1859 年に報文「与えられた限界以下の素数の個数について」の中で

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

を複素変数関数として扱い, $\pi(x)$ に対して明示的な表示式を得た.

Riemann の着想

Euler が扱った関数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p:\text{素数}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} \quad (s > 1)$$

を因数分解する！

復習 (因数分解)

- $s^2 - 5s + 6 = (s-2)(s-3)$
- $s^2 + 1 = (s-i)(s+i)$. ただし $i^2 = -1$.
- $\dfrac{s^2 - s - 2}{s^2 + 3s + 2} = \dfrac{(s+1)(s-2)}{(s+1)(s+2)} = \dfrac{s-2}{s+2}$

$\zeta(s)$ の因数分解:

$$\prod_{p:\text{素数}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = \zeta(s) = \frac{\text{“}\prod_\alpha (s-\alpha)\text{”}}{\text{“}\prod_\beta (s-\beta)\text{”}}$$

ここで α は $\zeta(s)$ の零点, i.e. $\zeta(s)=0$ の解

β は $\zeta(s)$ の極, i.e. $\frac{1}{\zeta(s)}=0$ の解, i.e. $\zeta(s)=\infty$ の解

$\rightarrow$ 対数を考えると

「素数に関する和」$=$「$\zeta(s)$ の極と零点に関する和」

$\rightarrow$ (Riemann の素数公式)

$$\pi(x) = \sum_{p:\text{素数}\leq x} 1 = \text{「}\zeta(s)\text{ の極と零点に関する和」}$$

問題点

$s > 1$ に対して

$$0 < \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} < \infty$$

だから極も零点もない！因数分解できない！

解決の糸口: $s^2 + 1$ も実数の範囲では因数分解できないが, 複素数の範囲では $s^2 + 1 = (s - i)(s + i)$ と因数分解できた. $\zeta(s)$ も任意の複素数 s に対して考えば良いのでは？

Riemann (1859):
歴史上初めて, $\zeta(s)$ を複素変数関数として扱い, 突破口を開いた.
$\rightarrow \zeta(s)$ は Riemann ゼータ関数と呼ばれる.

複素関数としての $\zeta(s)$

以下 $s \in \mathbb{C}$ (複素数) とする.

Riemann ゼータ関数

$\mathrm{Re}(s) > 1$ のとき

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p:\text{素数}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

ここで $s = \sigma + it$ ($\sigma, t \in \mathbb{R}$ (実数)) とおくと

$$n^s = n^\sigma n^{it} = n^\sigma e^{it \log n} = n^\sigma (\cos(t \log n) + i \sin(t \log n)).$$

特に $|n^s| = n^\sigma$ であるから

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} = \zeta(\sigma) < \infty.$$

従って, $\zeta(s)$ は $\mathrm{Re}(s) > 1$ において定義できる.

問題

$\mathrm{Re}(s) \leq 1$ において $\zeta(s)$ をどう解釈するか？

$\zeta(s)$ は, 半平面 $\mathrm{Re}(s) > 1$ から複素数平面全体へ自然に延長できる (解析接続できる).

解析接続

例 (等比級数)

$$f(s) = 1 + s + s^2 + s^3 + \cdots \quad (|s| < 1)$$

$|s| < 1$ のとき　$f(s) = \dfrac{1}{1-s}$

右辺は複素数平面全体で意味を持つ！

→ $f(s)$ を, $|s| < 1$ から複素平面全体に自然に延長できる (解析接続できる). このような自然な関数としての延長は一意的である.

→ $f(s)$ は零点を持たず, 極は $s = 1$ のみ.

例 (ガンマ関数)

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx \quad (\mathrm{Re}(s) > 0)$$

$\mathrm{Re}(s) > 0$ のとき

$$\Gamma(s+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^s dx = \left[-e^{-x} x^s \right]_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx = s\Gamma(s).$$

従って

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s} = \frac{\Gamma(s+2)}{s(s+1)} = \cdots = \frac{\Gamma(s+N+1)}{s(s+1)\cdots(s+N)} \quad (N\text{:自然数})$$

$\to$ $\Gamma(s)$ は $\mathrm{Re}(s) > -N-1$ まで延長可.
そこでの極は $s = 0, -1, -2, \ldots, -N$.

$\to$ $\Gamma(s)$ は複素平面全体に延長可. 極は $s = 0, -1, -2, -3, \ldots$

$\Gamma(s)$ は零点を持たず, 次の形に因数分解される:

$$\Gamma(s) = \frac{e^{-\gamma s}}{s} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{n}{s+n} e^{\frac{s}{n}}$$
$$= \frac{e^{-\gamma s}}{s} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right)^{-1} e^{\frac{s}{n}}$$

ここで γ は Euler 定数:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right)$$
$$= 0.57721\cdots$$

$\zeta(s)$ の解析接続

定理 4

$\zeta(s)$ は次の表示式により複素平面全体へ解析接続される.

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \int_1^\infty \psi(x)(x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1-s}{2}})\frac{dx}{x} - \frac{1}{s(1-s)}$$

ここで

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x} \sim e^{-\pi x} \quad (x \to \infty)$$

(証明)　ガンマ関数の積分表示

$$\pi^{-\frac{s}{2}} n^{-s} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-\pi n^2 y} y^{\frac{s}{2}} \frac{dy}{y}$$

(ただし $y = x/(\pi n^2)$ と変数変換した) を用いる.

$$\begin{aligned}
\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) &= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty e^{-\pi n^2 y} y^{\frac{s}{2}} \frac{dy}{y} = \int_0^\infty \psi(y) y^{\frac{s}{2}} \frac{dy}{y} \\
&= \left(\int_0^1 + \int_1^\infty\right) \psi(y) y^{\frac{s}{2}} \frac{dy}{y} \\
&= \int_1^\infty \psi(z^{-1}) z^{-\frac{s}{2}} \frac{dz}{z} + \int_1^\infty \psi(y) y^{\frac{s}{2}} \frac{dy}{y} \quad (z = y^{-1})
\end{aligned}$$

変換公式 $\psi(z^{-1}) = z^{\frac{1}{2}} \psi(z) + \frac{1}{2} z^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}$ より

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \psi(z^{-1}) z^{-\frac{s}{2}} \frac{dz}{z} &= \int_1^\infty \psi(z) z^{\frac{1-s}{2}} \frac{dz}{z} + \frac{1}{2} \int_1^\infty (z^{\frac{1-s}{2}} - z^{-\frac{s}{2}}) \frac{dz}{z} \\
&= \int_1^\infty \psi(z) z^{\frac{1-s}{2}} \frac{dz}{z} - \frac{1}{s(1-s)}
\end{aligned}$$

故に

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \int_1^\infty \psi(x) (x^{\frac{s}{2}} + x^{\frac{1-s}{2}}) \frac{dx}{x} - \frac{1}{s(1-s)}$$

関数等式

定理 4 の式

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\int_1^\infty \psi(x)(x^{\frac{s}{2}}+x^{\frac{1-s}{2}})\frac{dx}{x}-\frac{1}{s(1-s)}$$

の右辺は変換 $s\leftrightarrow 1-s$ に関して不変だから

系 1 (関数等式)

$\hat{\zeta}(s)=\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$ とおくと

$$\hat{\zeta}(s)=\hat{\zeta}(1-s)$$

極

命題 1

$\zeta(s)$ の極は $s=1$ のみ

(証明) $I(s)=\displaystyle\int_1^\infty \psi(x)(x^{\frac{s}{2}}+x^{\frac{1-s}{2}})\frac{dx}{x}$ とおくと

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= \frac{I(s)}{\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})}-\frac{1}{\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})}\cdot\frac{1}{s(1-s)}\\ &= \frac{I(s)}{\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})}-\frac{2}{\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2}+1)}\cdot\frac{1}{1-s}\end{aligned}$$

$\rightarrow \zeta(s)=\infty \Leftrightarrow s=1$

零点

命題 2

$\mathrm{Re}(s) > 1$ では $\zeta(s) \neq 0$

(証明) Euler 積表示を利用する． $\mathrm{Re}(s) = \sigma > 1$ のとき

$$
\begin{aligned}
|\zeta(s)| &= \prod_p |1 - p^{-s}|^{-1} \\
&\geq \prod_p (1 + p^{-\sigma})^{-1} = \exp\Bigl[-\sum_p \log(1 + p^{-\sigma})\Bigr] \\
&= \exp\Bigl[\sum_p \Bigl(-p^{-\sigma} + \frac{1}{2}p^{-2\sigma} - \frac{1}{3}p^{-3\sigma} + \cdots\Bigr)\Bigr] \\
&\geq \exp\Bigl[-\sum_p p^{-\sigma}\Bigr] \geq \exp\Bigl[-\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma}\Bigr] = \exp[-\zeta(\sigma)] \\
&> 0
\end{aligned}
$$

命題 3

$\mathrm{Re}(s) < 0$ では　$\zeta(s) = 0 \iff s = -2, -4, -6, \ldots$

(証明) 関数等式を利用する． $\mathrm{Re}(s) < 0$ のとき

$$\begin{aligned}
\zeta(s) = 0 &\iff \frac{\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\zeta(1-s) = 0 \\
&\iff \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} = 0 \\
&\iff s = -2, -4, -6, \ldots
\end{aligned}$$

$\zeta(s)$ の極と零点

1. $\zeta(s)$ の極は $s = 1$ のみ
2. $\zeta(s)$ の零点は
   - $s = -2, -4, -6, \ldots$ (自明零点)
   - それ以外の零点 (非自明零点) は $0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1$ 上に存在

非自明零点について

- 関数等式と関係式「$\zeta(\bar{s}) = \overline{\zeta(s)}$ (複素共役)」より

$$\rho \text{ が非自明零点} \Rightarrow 1-\rho,\ \bar{\rho},\ 1-\bar{\rho} \text{ も非自明零点}$$

- $N(T) = \#\{\rho : \text{非自明零点} \mid 0 \leq \mathrm{Im}(\rho) \leq T\}$ とおくと

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + (\text{誤差項})$$

(von Mangoldt, 1905)

$\zeta(s)$ の因数分解

定理 5 (Hadamard, 1893)

$$\zeta(s) = \frac{(2\pi/e)^s}{2(s-1)} \prod_{\rho:\text{非自明零点}} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{2n}\right) e^{-\frac{s}{2n}} \quad (s \in \mathbb{C})$$

ただし, ρ は重複度も込めて考える. つまり, $s=\rho$ が $\zeta(s)=0$ の m 重解ならば, 対応する因子を m 回掛ける.

Euler 積表示

$$\zeta(s) = \prod_{p:\text{素数}} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} \quad (\mathrm{Re}(s) > 1)$$

を組み合わせて, Riemann の素数公式を得る.

Riemann の素数公式

定理 6

整数でない $x > 1$ に対して

$$\pi(x) + \frac{1}{2}\pi(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{1}{3}\pi(x^{\frac{1}{3}}) + \cdots$$
$$= \mathrm{Li}(x) - \sum_{\rho} \mathrm{Li}(x^{\rho}) - \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Li}(x^{-2n}) - \log 2$$

ここで ρ は $\zeta(s)$ の非自明零点を虚部が小さい方から加えていくものとする. 重複度も込めて考える.

- $\mathrm{Li}(x) \sim \dfrac{x}{\log x}, \quad \mathrm{Li}(x^{\rho}) \sim \dfrac{x^{\rho}}{\rho \log x} \quad (x \to \infty)$
- $-\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Li}(x^{-2n}) = \int_x^{\infty} \frac{dt}{t(t^2-1)\log t}$

定理 6'

整数でない $x > 1$ に対して

$$\pi(x) = \sum_{m \le \log_2 x} \frac{\mu(m)}{m} \left(\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{m}}) - \sum_{\rho} \mathrm{Li}(x^{\frac{\rho}{m}}) + \int_{x^{\frac{1}{m}}}^{\infty} \frac{du}{t(t^2-1)\log t} - \log 2 \right)$$

ここで μ は Möbius 関数:

$$\mu(m) = \begin{cases} 1 & m = 1, \\ (-1)^k & m \text{ が相異なる } k \text{ 個の積}, \\ 0 & \text{それ以外 i.e. } m \text{ がある素数の 2 乗で割り切れる} \end{cases}$$

Riemann の素数公式より

$$\pi(x) = \mathrm{Li}(x) - \sum_{\rho} \mathrm{Li}(x^{\rho}) + (\text{誤差項})$$

ここで

$$\mathrm{Li}(x) \sim \frac{x}{\log x}, \quad |\,\mathrm{Li}(x^{\rho})| \sim \frac{x^{\mathrm{Re}(\rho)}}{|\rho| \log x} \quad (x \to \infty)$$

$\to 0 < \mathrm{Re}(\rho) < 1$ ($\forall\rho$: 非自明零点) $\Longleftrightarrow$ 素数定理 $\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x)$

1896 年に Hadamard と de la Vallée Poussin は独立に $0 < \mathrm{Re}(\rho) < 1$ を示し, 素数定理を証明した.

Riemann 予想

Riemann 予想

Riemann 予想

Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ の非自明零点の実部は全て $\dfrac{1}{2}$ である

虚部が正である非自明零点のうち最初の 3 個:

$$\rho_1 = \tfrac{1}{2} + 14.134725141734\cdots i$$ [1]
$$\rho_2 = \tfrac{1}{2} + 21.022039638771\cdots i$$
$$\rho_3 = \tfrac{1}{2} + 25.010857580145\cdots i$$

Gourdon-Demichel (2004): 最初の 10 兆個は Riemann 予想を満たす

[1] いよ～意味よ何？恋しい波よ

定理 7 (Koch, 1901)

Riemann 予想が正しい $\Longleftrightarrow \pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O(x^{\frac{1}{2}} \log x)$

右の式は次を意味する:

x が十分大きいとき $|\pi(x) - \mathrm{Li}(x)| < Cx^{\frac{1}{2}} \log x$ $(\exists C > 0)$

定理 8 (Schoenfeld, 1976)

Riemann 予想が正しい $\Longleftrightarrow |\pi(x) - \mathrm{Li}(x)| < \dfrac{1}{8\pi} x^{\frac{1}{2}} \log x \quad (\forall x \geq 2657)$

現在までの成果

非零領域

$s = \sigma + it$ $(\sigma, t \in \mathbb{R})$ と書く

Riemann 予想「$\sigma > 1/2$ の範囲に零点は存在しない」

- de la Vallée Poussin (1899): 次を満たす範囲に零点は存在しない

$$\sigma \geq 1 - \frac{c_1}{\log(|t|+2)} \quad (\exists c_1 > 0)$$

$$\to \pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O(x \exp[-c_2(\log x)^{1/2}]) \quad (\exists c_2 > 0)$$

- Korobov, Vinogradov (1958): 次を満たす範囲に零点は存在しない

$$\sigma \geq 1 - \frac{c_3}{(\log(|t|+2))^{2/3}(\log\log(|t|+3))^{1/3}} \quad (\exists c_3 > 0)$$

$$\to \pi(x) = \mathrm{Li}(x) + O(x \exp[-c_4(\log x)^{3/5}(\log\log x)^{-1/5}]) \quad (\exists c_4 > 0)$$

臨界線 $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$ 上の零点

$$N(T) := \#\{\rho : \text{非自明零点} \mid 0 \le \mathrm{Im}(\rho) \le T\}$$
$$= \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T)$$
$$N_0(T) := \#\{\rho : \text{非自明零点} \mid \mathrm{Re}(s) = \tfrac{1}{2}, 0 \le \mathrm{Im}(\rho) \le T\}$$

Riemann 予想「$N_0(T) = N(T)$」

- Hardy (1914): $N_0(T) \to \infty \quad (T \to \infty)$
  無限個の非自明零点はリーマン予想を満たす
- Selberg (1942): $\exists C > 0$ s.t. $N_0(T) \ge CN(T) \quad (T$:十分大)
  少なくとも正の%の非自明零点はリーマン予想を満たす
- Conrey (1989): $N_0(T) \ge \frac{2}{5} N(T) \quad (T$:十分大)
  少なくとも 40 %の非自明零点はリーマン予想を満たす

零点密度

$0<\sigma<1$ とする

$$
\begin{aligned}
N(T) &:= \#\{\rho : \text{非自明零点} \mid 0 \le \mathrm{Im}(\rho) \le T\} \\
&= \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T) \\
N(\sigma, T) &:= \#\{\rho : \text{非自明零点} \mid \sigma \le \mathrm{Re}(s) < 1, 0 \le \mathrm{Im}(\rho) \le T\}
\end{aligned}
$$

Riemann 予想「$N(\sigma,T)=0 \quad (\forall\sigma > 1/2)$」

- Bohr-Landau (1914): $N(\frac{1}{2}+\delta, T) = O(T) \quad (0<\delta<1/2)$
  殆ど全ての非自明零点は $|\mathrm{Re}(s)-\frac{1}{2}|<\delta$ の範囲に存在
- Ingham (1940)+Huxley (1972):
  $N(\sigma,T) = O(T^{(\frac{12}{5}+\varepsilon)(1-\sigma)}) \quad (\varepsilon>0,\ 0<\sigma<1)$
  $\to$ Huxley の素数定理 $\pi(x+y)-\pi(x) \sim \dfrac{y}{\log x} \quad (x^{\frac{7}{12}+\varepsilon}<y<x)$
  $\to$ 十分大きな n に対して, 立方数 n^3 と $(n+1)^3$ の間には素数が存在

同値な命題

以下はすべて Riemann 予想と同値

Mertens 予想 (修正版)

$M(x) := \sum_{n \le x} \mu(x)$ (Mertens 関数). 任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$M(x) = O(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \quad (x \to \infty)$$

- $\dfrac{1}{\zeta(s)} = \prod_p \left(1 - \dfrac{1}{p^s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\mu(n)}{n^s}$
- $M(n) = \det A_n$. ここで $A_n = (a_{ij})$ は n 次 Redheffer 行列 i.e.

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & j = 1 \text{ または } i|j \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

予想 (Robin, 1984)

$\sigma(n)$ を自然数 n の正の約数の和とすると

$$\sigma(n) < e^{\gamma} n \log\log n \quad (\forall n > 5040)$$

ここで $\gamma = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n) = 0.57721\cdots$ (Euler 定数)

予想 (Lagarias, 2001)

$$\sigma(n) < H_n + \exp(H_n)\log(H_n) \quad (\forall n > 1)$$

ここで $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

Riemann ゼータ関数とランダム行列

零点の固有値解釈

Hilbert と Pólya の提言

非自明零点 $\rho = \frac{1}{2} + i\gamma$ に対して, γ たちはある Hermite 作用素 (行列) の固有値だろう

成功例:

- Selberg ゼータ関数 $\to$ (非ユークリッド) Laplace 作用素
- 合同ゼータ関数 $\to$ Frobenius 作用素

零点の 2 点相関

以下, Riemann 予想が正しいと仮定する.
非自明零点 $\rho = \frac{1}{2} + i\gamma$ のうちで $\gamma > 0$ なるものを順に
$0 < \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \gamma_3 \leq \cdots$ と書き, $\hat{\gamma}_j := \frac{\gamma_j \log \gamma_j}{2\pi} \sim j \ (j \to \infty)$ とおく.

定理 9 (Montgomery, 1972 頃)

適当な f に対して

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{1 \leq j \neq k \leq N} f(\hat{\gamma}_j - \hat{\gamma}_k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(1 - \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x} \right)^2 \right) dx$$

Dyson: $1 - \left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2$ は, ランダムな Hermite 行列 (GUE) の 2 点相関関数！
$\leftarrow$ 数論とランダム行列理論と出会い

※現在, 数論では CUE を扱う

円ユニタリアンサンブル (CUE)

$U(N) = \{A : N$ 次複素正方行列, ${}^t\bar{A}A = I\}$: N 次ユニタリ行列全体

$$A \sim \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{i\theta_N} \end{pmatrix} \quad (0 \le \theta_1, \dots, \theta_N < 2\pi)$$

dA: 正規化された Haar 測度

f が $A \in U(N)$ の固有値だけで定まる関数のとき

$$\int_{U(N)} f(A)dA = \frac{1}{N!(2\pi)^N} \int_{[0,2\pi]^N} f(\theta_1, \dots, \theta_N) \prod_{1 \le j < k \le N} |e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}|^2 d\theta_1 \cdots d\theta_N$$

2 点相関関数

2 点相関関数

$$
\begin{aligned}
&R(\theta_1, \theta_2; N) \\
&\quad := \frac{1}{(N-2)!(2\pi)^N} \int_{[0,2\pi]^{N-2}} \prod_{1 \le j < k \le N} |e^{i\theta_j} - e^{i\theta_k}|^2 d\theta_3 \cdots d\theta_N \\
&\quad = \frac{1}{(2\pi)^2} \left(N^2 - \left(\frac{\sin \frac{Nv}{2}}{\sin \frac{v}{2}} \right)^2 \right) \qquad (v = \theta_1 - \theta_2)
\end{aligned}
$$

$\hat{\theta}_j := \theta_j \dfrac{N}{2\pi} \quad (\to 0 \le \hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_N \le N)$. N が大きいとき

$$
\left(\frac{2\pi}{N} \right)^2 R(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2; N) \approx 1 - \left(\frac{\sin \pi \hat{v}}{\pi \hat{v}} \right)^2 \qquad (\hat{v} = \hat{\theta}_1 - \hat{\theta}_2)
$$

適当な g に対して

$$\lim_{N\to\infty}\int_{U(N)}\frac{1}{N}\sum_{1\le j\ne k\le N} g(\hat{\theta}_j-\hat{\theta}_k)dA=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\left(1-\left(\frac{\sin\pi x}{\pi x}\right)^2\right)dx$$

Montgomery の結果 (定理 9):

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{1\le j\ne k\le N} f(\hat{\gamma}_j-\hat{\gamma}_k)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(1-\left(\frac{\sin\pi x}{x}\right)^2\right)dx$$

$\to$ 非自明零点の虚部 $\approx$ ランダムなユニタリ行列の固有値の偏角

Rudnick-Sarnak (1996): n 点相関

平均値理論への応用

平均 Lindelöf 予想

任意の自然数 k と $\varepsilon > 0$ に対し

$$I_k(T) := \frac{1}{T}\int_0^T \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^{2k} dt = O(T^{\varepsilon}) \quad (T \to \infty)$$

※ Riemann 予想 $\Rightarrow$ 平均 Lindelöf 予想

Hardy-Littlewood (1918): $I_1(T) \sim \log T$

Ingham (1926): $I_2(T) \sim \dfrac{1}{2\pi^2}(\log T)^4$

平均 Lindelöf 予想 (精密版) (Conrey-Ghosh, 1984)

$$I_k(T) \sim g_k a_k (\log T)^{k^2}$$

ここで, g_k はある整数であり,

$$a_k := \frac{1}{(k^2)!} \prod_{p:\text{素数}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{k^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d_k(p^j)^2}{p^j}$$

$$d_k(n) := \#\{(n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^k \mid n = n_1 \cdots n_k\}$$

$g_1 = 1, \quad g_2 = 2, \quad g_3 \overset{?}{=} 42$ (1995 年), $\quad g_4 \overset{?}{=} 24024$ (1998 年)

数論的方法 $\to$ g_5 の予想は不可能　ランダム行列理論 $\to$ 一般の g_k を予想

$g_5 \overset{?}{=} 701149020, \quad g_6 \overset{?}{=} 1671643033734960, \ldots$ (1998 年)

Keating-Snaith の着想

非自明零点の虚部 $\gamma \approx$ ランダムなユニタリ行列 A の固有値の偏角 θ

$\zeta(\frac{1}{2}+it)=0$ の解 $\approx \det(I-e^{-ix}A)=0$ の解

$$\zeta(\tfrac{1}{2}+it) \approx \det(I-e^{-ix}A)$$

定理 10 (Keating-Snaith, 1998)

任意の実数 x に対して

$$\int_{U(N)} |\det(I - e^{-ix}A)|^{2k} dA = \prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{k} \frac{N+i+j-1}{i+j-1}$$

$$\sim (k^2)! \prod_{j=0}^{k-1} \frac{j!}{(j+k)!} \cdot \frac{N^{k^2}}{(k^2)!} \quad (N \to \infty)$$

$$g_k \stackrel{?}{=} (k^2)! \prod_{j=0}^{k-1} \frac{j!}{(j+k)!}$$