abc 予想入門

小野寺一浩

千葉工業大学

2022 年 10 月 15 日

§1.1 abc 予想：概略

abc 予想

「かけ算」と「たし算」の間にある奥深い規則性を見出して定式化したもの

本講演では，まず 3 個の自然数 a, b, c に対して，

ある種の「かけ算的性質」と「たし算的性質：$a + b = c$」

が両立しづらいことを確認する．

その後で，abc 予想により，そのような現象を見通し良く理解出来ることを説明する．

両立しづらい例 1

定理 1 (Fermat の最終定理 (Wiles, 1995))

n を 3 以上の整数とする．自然数 x, y, z で

$$x^n + y^n = z^n$$

を満たすものは存在しない．

※ $n = 2$ のときは無数に解をもつ．(cf. ピタゴラス数)

要するに, 3 個の自然数 a, b, c に対して

「かけ算的性質：n 乗数 $(n \geq 3)$」と「たし算的性質：$a + b = c$」

は両立しない．

例　3 乗数の列 $1,\ 8,\ 27,\ 64,\ 125,\ 216,\ 343,\ 512,\ 729,\ 1000, \ldots$
から $a + b = c$ を満たす組 (a, b, c) を見つけることはできない．

両立しづらい例 2

「かけ算的性質」$=$ 「2,3,5 以外の素因数を持たない」$\cdots (*)$

例　$(*)$ を満たす自然数：

$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 15,\ 16,\ 18,\ 20,\ 24,\ 25,\ 27,\ 30,\ 32,\ 36,$
$40,\ 45,\ 48,\ 50,\ 54,\ 60,\ 64,\ 72,\ 75,\ 80,\ 81,\ 90,\ 96,\ 100,\ 108,\ 120,\ 125,$
$128,\ 135,\ 144,\ 150,\ 160,\ 162,\ 180,\ 192,\ 200,\ 216,\ 225,\ 240,\ 243,\ 250,$
$256,\ 270,\ 288,\ 300,\ 320,\ 324,\ 360,\ 375,\ 384,\ 400,\ 405, \ldots$

問題

上の数列から $a+b=c$ を満たす互いに素な自然数の組 (a,b,c) をどれ位見つけることが出来るか？ただし，a,b,c が互いに素であるとは，a,b,c が共通の約数 (>1) を持たないことをいう．

【注意】条件「互いに素」を課さないと，一つの組から無数の組が簡単に構成できてしまう．例えば，$(1,2,3) \to (n,2n,3n)$ (n は $(*)$ を満たす自然数)

定理 2 (Siegel の結果 (1921) の一例)

次の 2 条件を満たす互いに素な自然数の組 (a, b, c) は有限個しかない.

(1) [かけ算的性質] a, b, c が $(*)$ を満たす

(2) [たし算的性質] $a + b = c$

例 条件を満たす組 (a, b, c) $(a \leq b)$：

$$(1,1,2),\ (1,2,3),\ (1,3,4),\ (1,4,5),\ (2,3,5),\ (1,5,6),$$
$$(3,5,8),\ (1,8,9),\ (4,5,9),\ (1,9,10),\ (1,15,16),\ (1,24,25),$$
$$(9,16,25),\ (2,25,27),(5,27,32),\ (1,80,81),\ (3,125,128)$$

「たし算的性質：$a+b=c$」と両立しづらい「かけ算的性質」の例：

1. n 乗数 $(n \geq 3)$
2. $2,3,5$ 以外の素因数を持たない

この 2 種類の「かけ算的性質」は, 一見異なるように思える.

$$\downarrow$$
$$\downarrow$$
$$\downarrow$$

しかし, それらの背後にはある共通した性質があり,
それが原因で両立しづらくなっている.

abc 予想は, その事実を見通し良く説明してくれる.

§1.2 abc 予想の定式化

定義 (根基)

自然数 n の根基 (radical) を $\mathrm{rad}(n)$ で表し, 次で定義する：

- $\mathrm{rad}(1) := 1$
- 2 以上の整数 n に対しては $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r}$ と素数分解できるとき

$$\mathrm{rad}(n) := p_1 p_2 \cdots p_r$$

要するに, $\mathrm{rad}(n)$ は n の素因数の積である.

<u>例</u>

$$\begin{aligned}
\mathrm{rad}(8) &= \mathrm{rad}(2^3) = 2 \\
\mathrm{rad}(10) &= \mathrm{rad}(2 \cdot 5) = 2 \cdot 5 = 10 \\
\mathrm{rad}(12) &= \mathrm{rad}(2^2 \cdot 3) = 2 \cdot 3 = 6 \\
\mathrm{rad}(36) &= \mathrm{rad}(2^2 \cdot 3^2) = 2 \cdot 3 = 6
\end{aligned}$$

abc-triple とは, $a+b=c$ を満たす互いに素な自然数の組 (a,b,c) のこと

予想 1 (abc 予想 (Oesterlé-Masser, 1985))

ε を任意の正の数とする．このとき, abc-triple (a,b,c) は, 有限個の例外を除いて,

$$c < \{\mathrm{rad}(abc)\}^{1+\varepsilon} \tag{1}$$

を満たす．

※不等式 (1) は

「足し算的性質：$a+b=c$」と「かけ算的対象：rad」

の間にある規則性を表現している

【補足】
2012 年に望月新一教授が証明を発表
2020 年に論文が査読を通過
2021 年に論文が雑誌に掲載

例

$\varepsilon = 0.2,\ 0.4,\ 0.6,\ 0.8,\ 1.0$ に対して，abc-triple (a,b,c) で

$$c < \{\mathrm{rad}(abc)\}^{1+\varepsilon} \qquad \left(\Leftrightarrow q = q(a,b,c) := \frac{\log c}{\log \mathrm{rad}(abc)} < 1+\varepsilon \right)$$

を満たす例 ($\circ$) と満たさない例 ($\times$)：

a	b	c	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	q
1	2	3	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	0.6131
2	5^2	3^3	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	0.9690
2^2	11^2	5^3	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	1.0272
3^2	$2^8 \cdot 61$	5^6	$\times$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	1.2855
$2^{10} \cdot 7$	5^7	$2 \cdot 3^{13} \cdot 47^2$	$\times$	$\times$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	1.4362
1	$2 \cdot 3^7$	$5^4 \cdot 7$	$\times$	$\times$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	1.5679
2	$3^{10} \cdot 109$	23^5	$\times$	$\times$	$\times$	$\circ$	$\circ$	1.6299

abc 予想の意味 (一つの側面)

準備として，まず次の命題を示す．

命題 1

$c < \{\mathrm{rad}(abc)\}^{1+\varepsilon}$ を満たす abc-triple(a, b, c) に対して，次が成り立つ：

$$\frac{a}{\{\mathrm{rad}(a)\}^{3(1+\varepsilon)}} \cdot \frac{b}{\{\mathrm{rad}(b)\}^{3(1+\varepsilon)}} \cdot \frac{c}{\{\mathrm{rad}(c)\}^{3(1+\varepsilon)}} < 1.$$

つまり，「(左辺) ≥ 1」を満たす abc-triple は，abc 予想の例外である．

【証明】以下の二つの事実から，直ちに従う．

- $a < c,\ b < c$ より $abc < c^3 < \{\mathrm{rad}(abc)\}^{3(1+\varepsilon)}$
- a, b, c はどの二つも互いに素だから $\mathrm{rad}(abc) = \mathrm{rad}(a)\,\mathrm{rad}(b)\,\mathrm{rad}(c)$ □

命題 1 から分かる「abc 予想の意味」

自然数 a, b, c が次のような性質を満たすとする：

「自然数 m に対して $\dfrac{m}{\{\mathrm{rad}(m)\}^{3(1+\varepsilon)}} \geq 1$ が起こりやすい性質」$\cdots (*)$

$\rightarrow \dfrac{a}{\{\mathrm{rad}(a)\}^{3(1+\varepsilon)}} \cdot \dfrac{b}{\{\mathrm{rad}(b)\}^{3(1+\varepsilon)}} \cdot \dfrac{c}{\{\mathrm{rad}(c)\}^{3(1+\varepsilon)}} \geq 1$ になりやすい

$\rightarrow$ 仮に (a, b, c) が abc-triple ならば，それは abc 予想の例外になりやすい

$\rightarrow$ abc 予想の例外は有限個だから，(a, b, c) は abc-triple になりづらい

$\rightarrow$ 性質 $(*)$ は「たし算的性質：$a + b = c$」との両立が難しい.

性質 $(*)$ の例　先ほど扱った二つの「かけ算的性質」があげられる：

1. n 乗数 $(n \geq 3)$　$(n = 3$ の場合は微妙？$)$
2. $2, 3, 5$ 以外の素因数を持たない

§1.3 abc 予想は正しいか？ (数値計算による分析)

表 1：$q = (\log c)/\{\log \mathrm{rad}(abc)\}$ $(a < b)$

	$q > 1$	$q > 1.05$	$q > 1.1$	$q > 1.2$	$q > 1.3$	$q > 1.4$
$c < 10^2$	6	4	4	2	0	0
$c < 10^3$	31	17	14	8	3	1
$c < 10^4$	120	74	50	22	8	3
$c < 10^5$	418	240	152	51	13	6
$c < 10^6$	1,268	667	379	102	29	11
$c < 10^7$	3,499	1,669	856	210	60	17
$c < 10^8$	8,987	3,869	1,801	384	98	25
$c < 10^9$	22,316	8,742	3,693	706	144	34
$c < 10^{10}$	51,677	18,233	7,035	1,159	218	51
$c < 10^{11}$	116,978	37,612	13,266	1,947	327	64
$c < 10^{12}$	252,856	73,714	23,773	3,028	455	74
$c < 10^{13}$	528,274	139,762	41,438	4,519	599	84
$c < 10^{14}$	1,055,541	258,146	70,047	6,665	769	98
$c < 10^{15}$	1,880,836	446,903	114,712	9,497	998	112
$c < 10^{16}$	3,055,163	700,263	175,134	13,116	1,232	126
$c < 10^{17}$	4,685,632	1,024,027	247,237	17,576	1,530	143
$c < 10^{18}$	6,619,318	1,379,207	321,371	21,890	1,822	160

表 2：$q = (\log c)/\{\log \mathrm{rad}(abc)\}$ が大きい abc-triple

知られている中でのベスト 10 $(a < b)$

	a	b	c	q
1	2	$3^{10} \cdot 109$	23^5	1.62991
2	11^2	$3^2 \cdot 5^6 \cdot 7^3$	$2^{21} \cdot 23$	1.62599
3	$19 \cdot 1307$	$7 \cdot 29^2 \cdot 31^8$	$2^8 \cdot 3^{22} \cdot 5^4$	1.62349
4	283	$5^{11} \cdot 13^2$	$2^8 \cdot 3^8 \cdot 17^3$	1.58076
5	1	$2 \cdot 3^7$	$5^4 \cdot 7$	1.56789
6	7^3	3^{10}	$2^{11} \cdot 29$	1.54708
7	$7^2 \cdot 41^2 \cdot 311^3$	$11^{16} \cdot 13^2 \cdot 79$	$2 \cdot 3^3 \cdot 5^{23} \cdot 953$	1.54443
8	5^3	$2^9 \cdot 3^{17} \cdot 13^2$	$11^5 \cdot 17 \cdot 31^3 \cdot 137$	1.53671
9	$13 \cdot 19^6$	$2^{30} \cdot 5$	$3^{13} \cdot 11^2 \cdot 31$	1.52700
10	$3^{18} \cdot 23 \cdot 2269$	$17^3 \cdot 29 \cdot 31^8$	$2^{10} \cdot 5^2 \cdot 7^{15}$	1.52216

引用元：

表 1 は "Synthese resultaten" rekenmeemetabc.nl.

表 2 は Nitaj, The abc conjecture home page.

数値計算からの分析 (私見)：

1. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $c \geq \{\mathrm{rad}(abc)\}^{1+\varepsilon}$ を満たすような例外的な abc-triple の (ある種の) 密度は 0 になりそう. 例えば,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\#\{c \leq x \mid \text{例外的な abc-triple } (a,b,c) \text{ が存在する }\}}{x} = 0 \quad (2)$$

が成り立ちそう.
しかし, 例外が有限組しかないかどうかは正直予想できない.

2. ε がある一定数より大きければ, 例外はなさそう.

前者について

・(2) は比較的容易に証明できる.

・例外の有限性を期待できる「確率的な発見的方法」は知られている.

(ref. せきゅーん, INTEGERS, Q&ABC (その 5))

後者について 例えば, 次の予想が広く知られている.

予想 2 (abc 予想 (簡潔版))

全ての abc-triple に対して, 次が成立する：

$$c < \{\mathrm{rad}(abc)\}^2$$

【注意】予想 1, 2 は, それぞれ「弱い abc 予想」,「強い abc 予想」と呼ばれることがあるが, 論理的な強弱関係はない (少なくとも現時点では知られていない). また, 予想 2 は現時点では未解決である.

§1.4 abc 予想の同値な言い換え

予想 1 (abc 予想 [再掲])

ε を任意の正の数とする．このとき，abc-triple (a,b,c) は，有限個の例外を除いて，次を満たす：

$$c < \{\mathrm{rad}(abc)\}^{1+\varepsilon}$$

予想 1 は次の予想と同値である：

予想 3 (abc 予想 (不等式調整版))

ε を任意の正数とする．このとき，全ての abc-triple に対して

$$c < K_\varepsilon\{\mathrm{rad}(abc)\}^{1+\varepsilon}$$

が成り立つような定数 $K_\varepsilon \geq 1$ が存在する．

予想 2(abc 予想 (簡潔版)) は，$\varepsilon = 1$ のとき $K_\varepsilon = 1$ であることを主張する．

【同値性の証明】予想 1 $\Rightarrow$ 予想 3

(i) 例外的な abc-triple がない ε に対しては $K_\varepsilon = 1$ とすれば良い.

(ii) 例外的な abc-triple がある ε に対しては, その有限組を

$$(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), \ldots, (a_n, b_n, c_n)$$

とする：$c_i \geq \{\mathrm{rad}(a_i b_i c_i)\}^{1+\varepsilon}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. ここで

$$1 \leq \max_{1 \leq i \leq n} \frac{c_i}{\{\mathrm{rad}(a_i b_i c_i)\}^{1+\varepsilon}} < K_\varepsilon$$

を満たすような $K_\varepsilon > 1$ を選べば,

$$c_i < K_\varepsilon \{\mathrm{rad}(a_i b_i c_i)\}^{1+\varepsilon} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

が成り立つ. 一方, 例外でない abc-triple (a, b, c) に対しても

$$c < \{\mathrm{rad}(abc)\}^{1+\varepsilon} < K_\varepsilon \{\mathrm{rad}(abc)\}^{1+\varepsilon}$$

が成り立つ. 故に, 予想 3 が成り立つ.

予想 3 $\Rightarrow$ 予想 1

(a, b, c) を例外的な abc-triple とする：$c \geq \{\mathrm{rad}(abc)\}^{1+\varepsilon} \quad \cdots (*)$
$0 < \varepsilon' < \varepsilon$ なる ε' を一つ選ぶ．予想 3 より

$$c < K_{\varepsilon'}\{\mathrm{rad}(abc)\}^{1+\varepsilon'}$$

が成り立つような $K_{\varepsilon'} \geq 1$ が存在する．よって

$$\begin{aligned} c^{1+\varepsilon} &< K_{\varepsilon'}^{1+\varepsilon}\{\mathrm{rad}(abc)\}^{(1+\varepsilon)(1+\varepsilon')} \\ &\leq K_{\varepsilon'}^{1+\varepsilon} c^{1+\varepsilon'} \quad (\because \ (*)) \end{aligned}$$

$$c^{\varepsilon-\varepsilon'} < K_{\varepsilon'}^{1+\varepsilon}$$

$$c < K_{\varepsilon'}^{(1+\varepsilon)/(\varepsilon-\varepsilon')}$$

従って，c の取り得る値は有限個である．$a + b = c$ より，a, b の取り得る値も有限個だから，例外的な abc-triple も有限個である．
故に，予想 1 が成り立つ． $\square$

§1.5 補足

補足 1

abc-triple とは, $a+b=c$ を満たす互いに素な自然数の組 (a,b,c) のこと.
ここで, 条件「互いに素」は必要である.
仮にこの条件を外してしまうと, abc 予想の例外が無数に現れてしまう.

例えば, $(a,b,c)=(1\cdot 3^k,\ 2\cdot 3^k,\ 3\cdot 3^k)$ (k は自然数) は,
$a+b=c$ を満たす互いに素でない組である. 一方,

$$c=3^{k+1}, \qquad \{\mathrm{rad}(abc)\}^{1+\varepsilon}=6^{1+\varepsilon}$$

だから, 十分大きな k に対して常に $c\geq\{\mathrm{rad}(abc)\}^{1+\varepsilon}$ を満たす.

また, 上記の (a,b,c) たちに対して
$c<K_\varepsilon\{\mathrm{rad}(abc)\}^{1+\varepsilon}$ が成り立つような定数 $K_\varepsilon\geq 1$ も存在しない.

補足 2

$\varepsilon = 0$ の場合の不等式 $c < \mathrm{rad}(abc)$ を満たさない abc-triple は無数にある.

例えば, abc-triple $(a, b, c) = (3^{2^r} - 1, 1, 3^{2^r})$ $(r = 1, 2, 3, \ldots)$. 実際,

$$\begin{aligned} 3^{2^r} - 1 &= (3^{2^{r-1}})^2 - 1^2 = (3^{2^{r-1}} + 1)(3^{2^{r-1}} - 1) \\ &= (3^{2^{r-1}} + 1)(3^{2^{r-2}} + 1)(3^{2^{r-2}} - 1) \\ &\cdots \\ &= \underbrace{(3^{2^{r-1}} + 1)(3^{2^{r-2}} + 1) \cdots (3^2 + 1)(3 + 1)(3 - 1)}_{r+1 \text{ 個の値の積}} \end{aligned}$$

各因数は偶数であり, また 3+1=4 に注意すると, $3^{2^r} - 1$ は 2^{r+2} で割り切れるので

$$\begin{aligned} \mathrm{rad}(abc) &= \mathrm{rad}\big((3^{2^r} - 1)3^{2^r}\big) = \mathrm{rad}\left(2 \cdot \frac{3^{2^r} - 1}{2^{r+2}} \cdot 3\right) \\ &\leq 2 \cdot \frac{3^{2^r} - 1}{2^{r+2}} \cdot 3 < \frac{3}{2^{r+1}} c < c. \end{aligned}$$

また, 上記の (a, b, c) たちに対して

$c < K_0 \, \mathrm{rad}(abc)$ が成り立つような定数 $K_0 \geq 1$ も存在しない.

§2.1 応用：Fermat の最終定理

定理 3（「Fermat の最終定理」への応用）

ある $\varepsilon > 0$ に対して，全ての abc-triple (a, b, c) が

$$c < K_\varepsilon \{\mathrm{rad}(abc)\}^{1+\varepsilon}$$

を満たすような定数 $K_\varepsilon \geq 1$ が存在するならば，
Fermat 方程式 $x^n + y^n = z^n$ について，以下が成り立つ：

(1) $n > 3(1+\varepsilon)$ のとき，互いに素な解の個数は有限個である.

(2) 特に，$n \geq 3(1+\varepsilon) + \log_2 K_\varepsilon$ のとき，解は存在しない.

【注意】Fermat 方程式の解 (x, y, z) に対して，
共通の約数 $d > 1$ があれば $(x/d, y/d, z/d)$ も解である.
従って，互いに素な解が本質的である.

系 1

abc 予想 (予想 1 or 3) が正しいなら, $x^n + y^n = z^n$ について次が成り立つ：

(1) $n \geq 3$ のとき, 互いに素な解の個数は有限個である.

(2) 十分大きな n に対して, 解は存在しない.

【証明】(1) 任意の $\varepsilon > 0$ に対して定理 3 の仮定を満たすから, $n > 3$ のときは正しい. $n = 3$ のときは, Euler により解が存在しないことが知られている. (2) 定理 3 より明らか. □

系 2

簡潔版 abc 予想 (予想 2) が正しいなら「Fermat の最終定理」が成立する.

【証明】定理 3 (2) より, $x^n + y^n = z^n$ $(n \geq 6)$ は解を持たない.
$n = 3, 4, 5$ のとき解を持たないことは, 既に知られている.
($n = 3$: Euler, $n = 4$: Fermat, $n = 5$: Germain, Dirichlet, Legendre)

補足

Mochizuki(2021)：系 1 の結果は得られる.

K_ε の大きさは不明のため，「Fermat の最終定理」は得られない.

Mochizuki-Fesenko-Hoshi-Minamide-Porowski(2022)：

K_ε $(\varepsilon > 0.5)$ の大きさを具体的に評価することに成功した.
様々の先行研究と組み合わせることで，「Fermat の最終定理」に対して，Wiles のものとは異なる別証明を与えた.
更に，「一般化された Fermat 方程式」について次の結果を得た:

定理 4

r, s, t は，どの二つも互いに素な整数とする. l, m, n は，

$$\min\{l, m, n\} > \max\{2.453 \times 10^{30},\ \log_2 |rst|,\ 10 + 5\log_2(\mathrm{rad}(rst))\}$$

を満たす自然数とする．このとき，方程式 $rx^l + sy^m = tz^n$ を満たす互いに素な自然数解 (x, y, z) $(\neq (1, 1, 1))$ は存在しない.

定理 3 の証明

(1) 互いに素な組 (x, y, z) が Fermat 方程式 $x^n + y^n = z^n$ を満たすとする.
このとき, (x^n, y^n, z^n) は abc-triple であるから

$$\begin{aligned} z^n &< K_\varepsilon \{\mathrm{rad}(x^n y^n z^n)\}^{1+\varepsilon} \\ &= K_\varepsilon \{\mathrm{rad}(xyz)\}^{1+\varepsilon} \qquad (\because \mathrm{rad}(a^n) = \mathrm{rad}(a)) \\ &\leq K_\varepsilon (xyz)^{1+\varepsilon} \qquad (\because \mathrm{rad}(a) \leq a) \\ &< K_\varepsilon z^{3(1+\varepsilon)} \qquad (\because x < z,\ y < z) \\ \therefore \quad z^{n-3(1+\varepsilon)} &< K_\varepsilon \end{aligned}$$

仮定より $n - 3(1+\varepsilon) > 0$ だから, $z < K_\varepsilon^{\frac{1}{n-3(1+\varepsilon)}}$ である.
従って, 条件を満たす z は有限個である.
$x < z$, $y < z$ だから, 条件を満たす組 (x, y, z) は有限個である.

(2) $n \geq 3(1+\varepsilon) + \log_2 K_\varepsilon$ $(\cdots(*))$ のときを考える.

背理法で示すため,

「Fermat 方程式 $x^n + y^n = z^n$ を満たす互いに素な組 (x, y, z) が存在する」と仮定する. このとき, (1) と同様にして

$$z^{n-3(1+\varepsilon)} < K_\varepsilon$$

が成り立つ. $n \geq 3(1+\varepsilon)$ と $2 \leq z$ より

$$2^{n-3(1+\varepsilon)} \leq z^{n-3(1+\varepsilon)} < K_\varepsilon$$

だから, $n - 3(1+\varepsilon) < \log_2 K_\varepsilon$ である. これは $(*)$ に矛盾する.

故に, $n \geq 3(1+\varepsilon) + \log_2 K_\varepsilon$ のとき, $x^n + y^n = z^n$ の解は存在しない. □

§2.2 応用：Siegel の定理

$S = \{p_1, p_2, \ldots, p_s\}$ を有限個の素数の集合とする.
自然数 n が S-単数であるとは, n が $p_1, p_2, \ldots, p_s$ 以外の素因数を持たないときにいう.

定理 5 (Siegel, 1921)

$a + b = c$ を満たすような互いに素な S-単数の組 (a, b, c) は有限個しかない.

【abc 予想を用いた証明】条件を満たす組 (a, b, c) は abc-triple だから,
ある $\varepsilon > 0$ と $K_\varepsilon \geq 1$ が存在して,

$$c < K_\varepsilon \{\mathrm{rad}(abc)\}^{1+\varepsilon} \leq K_\varepsilon (p_1 p_2 \cdots p_s)^{1+\varepsilon}$$

が成り立つ. よって, 条件を満たす c は有限個である.
$a < c$, $b < c$ より, 条件を満たす (a, b, c) は有限個である. □

§2.3 応用：Erdös-Mollin-Walsh 予想

多冪数 …素因数分解したときの各素因数の指数が全て 2 以上となる自然数

例 $4 = 2^2,\ 8 = 2^3,\ 9 = 3^2,\ 16 = 2^4,\ 25 = 5^2,\ 27 = 3^3,\ 32 = 2^5,\ 36 = 2^2 \cdot 3^2$

予想 4 (Erdös(1976), Mollin-Walsh(1986))

3 連続する多冪数は存在しない.

定理 6

ある $\varepsilon < 1/3$ に対して, 全ての abc-triple (a, b, c) が

$$c < K_\varepsilon \{\mathrm{rad}(abc)\}^{1+\varepsilon}$$

を満たす定数 $K_\varepsilon \geq 1$ が存在するならば, 3 連続する多冪数は有限個である.

【補足】2 連続する多冪数は無数に存在する.
例えば, $x_n + y_n\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^n$ (n は自然数) とおくと,
$2^3 x_n^2 y_n^2,\ (x_n^2 + 2y_n^2)^2$ は 2 連続する多冪数である.

【定理 6 の証明】

3 連続する自然数 $n-1,\ n,\ n+1$ が多冪数であるとする.

このとき, $(n^2-1,\ 1,\ n^2)$ は abc-triple だから

$$\begin{aligned} n^2 &< K_\varepsilon\{\mathrm{rad}(n^2(n^2-1))\}^{1+\varepsilon} \\ &= K_\varepsilon\{\mathrm{rad}(n(n-1)(n+1))\}^{1+\varepsilon} \\ &\le K_\varepsilon\{\sqrt{n(n-1)(n+1)}\}^{1+\varepsilon} \\ &\qquad (\because a \text{ が多冪数ならば } \{\mathrm{rad}(a)\}^2 \le a) \\ &= K_\varepsilon\{\sqrt{n(n^2-1)}\}^{1+\varepsilon} \\ &< K_\varepsilon n^{\frac{3}{2}(1+\varepsilon)}. \end{aligned}$$

従って, $n^{\frac{1}{2}(1-3\varepsilon)} < K_\varepsilon$, つまり $n < K_\varepsilon^{\frac{2}{1-3\varepsilon}}$ が成り立つ.

故に, 条件を満たす n は有限個しかない. $\square$

§2.4 応用：Roth の定理

代数的無理数 … ある整数係数多項式の解となるような無理数

例 $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[4]{5}$ は代数的無理数 ($\log 2$, $\log 3$, e, π はそうではない)

1994 年に Bombieri は, abc 予想から次の定理 (の精密版) を示した.

定理 7 (Roth,1955 → フィールズ賞 (1958))

$\varepsilon > 0$ とし, α を代数的無理数とする. このとき

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}$$

を満たす既約分数 p/q $(q > 0)$ は有限個しかない.

§2.5　応用：Faltings の定理 (Mordell 予想)

1991 年に Elkies は, abc 予想から次の定理を示した.

定理 8 (Faltings, 1983 $\to$ フィールズ賞 (1986))

有理数係数の 2 変数数多項式 $f(x,y)$ に対して, 曲面 $f(x,y)=0$ の種数が 2 以上であれば, $f(a,b)=0$ を満たす有理数の組 (a,b) は有限個である.

※ 種数とは, 方程式 $f(x,y)=0$ の複素数解 $(x,y)=(x_1+ix_2, y_1+iy_2)$ $(x_i, y_i \in \mathbb{R})$ が作り出す, 実 4 次元空間の曲面内の穴の個数.

例　$f(x,y)=x^n+y^n-1$ $(n \geq 4)$ の種数は 2 以上
$\to$ 「Fermat の最終定理」への応用

【補足】K_ε が計算可能な形で abc 予想が証明されると,
可能な有理数の組の範囲が分かる. これは Faltings の手法では得られない.

§2.6 応用：数論的力学系

数論的力学系では, 例えば, 有理数 α の有理関数 $\phi(x)$ による軌道

$$\mathcal{O}_\phi(\alpha) = \{\alpha, \phi(\alpha), \phi^{(2)}(\alpha), \phi^{(3)}(\alpha), \dots\}$$

(ただし, $\phi^{(n)}$ は ϕ を n 回合成した関数) の数論的性質を研究する.

定理 9 (Gratton-Nguyen-Tucker, 2013)

$\phi(x) = p(x)/q(x)$ (既約分数) が次の 2 条件を満たすとする.

(i) $\phi(x)$ は cx^d の形ではなく, $\max\{\deg p, \deg q\} \geq 2$

(ii) $\mathcal{O}_\phi(\alpha)$ は無限集合

abc 予想が正しいならば, 数列 $\{\phi^{(n)}(\alpha)$ の既約分数表示の分母 $\}_{n=1}^{\infty}$ には, 有限項を除いて原始的素因数が存在する.

※ 数列 $\{a_n\}$ において, a_n の原始的素因数とは,
a_n の素因数であって, それより前の項の素因数ではないもの

§2.7 応用：その他

他にも様々な応用が知られている.

例えば, 次を参照：

Nitaj, The abc conjecture home page
(`https://nitaj.users.lmno.cnrs.fr/abc.html`)

2022 年 10 月 15 日現在では, 32 個の応用が掲載されている.
ただし, 代数体上の abc 予想などの応用も含む.

§3 abc 予想の起源

疑問

Oesterlé と Masser は, abc 予想をどうやって思いついたか？

Baker と Wüstholz によると

「この予想は最初オステルレ (Oesterlé) により，このような ε が存在するかもしれないという弱い形で述べられ，続いてマッサーにより精密化された上記の形として予想された．オステルレの動機はもともと楕円曲線についてのスピロ (Szpiro) の予想にあり，またマッサーは対数 1 次形式を用いた関数体上での abc-予想のメイソン (Mason) による解決から精密化のヒントを得たとされている.」

(『数学の最先端 21 世紀への挑戦 第 5 巻』11–12 ページから引用)

Szpiro 予想

有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線 E に対して，その重要な不変量である「極小判別式 Δ_E」と「導手 f_E」の関係を述べた予想.

予想 5 (Szpiro, 1980 年代)

ε を任意の正数とする. $\mathbb{Q}$ 上定義された全ての楕円曲線 E に対して

$$|\Delta_E| < K_\varepsilon f_E^{6(1+\varepsilon)} \tag{3}$$

が成り立つような定数 $K_\varepsilon \geq 1$ が存在する.

【abc 予想との関連 (概略)】abc-triple (a, b, c) に対して，
楕円曲線 $E : y^2 = x(x-a)(x+b)$ を考える. 条件「$a \equiv -1 \pmod 4$,
$b \equiv 0 \bmod 16$」の下では $\Delta_E = \left(\frac{abc}{2}\right)^2$, $f_E = \mathrm{rad}\left(\frac{abc}{16}\right)$ であり,
(3) は $(abc)^{1/3} < K'_\varepsilon \{\mathrm{rad}(abc)\}^{1+\varepsilon}$ (ただし, $K'_\varepsilon > 0$) の形に書ける.
$(abc)^{1/3} \leq c$ より, abc 予想から, この E に対しては (3) が成り立つ.

Szpiro 予想は, $1728\Delta_E = c_4^3 - c_6^2$ (c_4, c_6 は E のよく知られた不変量) と書けることを利用して, 次の強い予想に修正できる.

予想 6 (強い Szpiro 予想)

ε を任意の正数とする. 全ての $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線 E に対して

$$\max\{|c_4|^3, |c_6|^2\} < K_\varepsilon f_E^{6(1+\varepsilon)}$$

が成り立つような定数 $K_\varepsilon \geq 1$ が存在する.

【事実】

- 「abc 予想」$\Rightarrow$「Szpiro 予想」
- 「Szpiro 予想」$\Rightarrow$「弱い abc 予想：$c < K_\varepsilon \{\mathrm{rad}(abc)\}^{\frac{6}{5}+\varepsilon}$」
- 「強い Szpiro 予想」$\Leftrightarrow$「abc 予想」

Mason-Stothers の定理

定理 10 (多項式版「abc 定理」(Stothers, 1981; Mason, 1984))

定数でない複素数係数 1 変数多項式 $a(t), b(t), c(t)$ が互いに素であり，$a(t) + b(t) = c(t)$ を満たすならば

$$\max\{\deg a, \deg b, \deg c\} < \deg \operatorname{rad}(abc) \tag{4}$$

が成り立つ．ただし，多項式 $f(t)$ に対して $\operatorname{rad}(f) = \prod_{\alpha : f \text{ の零点}} (t - \alpha)$ とおく．

「整数」と「多項式」の対応

「整数」	$\leftrightarrow$	「多項式」
$\log \lvert a \rvert$	$\leftrightarrow$	$\deg a$
素数	$\leftrightarrow$	1 次式

を考えると，

不等式 (4) は，整数の世界では，abc-triple (a, b, c) に対して

$$\log c < \log \operatorname{rad}(abc) \qquad \text{i.e.} \qquad c < \operatorname{rad}(abc)$$

が成り立つことに対応する．(実際はそのままでは成り立たないが…)

その他の整数と多項式の類似例：

定理 11 (多項式版「Fermat の最終定理」(Liouville, 1879))

n を 3 以上の整数とする.

定数ではない複素数係数 1 変数多項式 $x(t), y(t), z(t)$ で

$$x(t)^n + y(t)^n = z(t)^n$$

を満たすものは存在しない.

【補足 1】定理 10 と定理 11 は, 高校数学程度の知識で, それぞれを直接示すことも可能. また定理 10 を認めれば, 定理 11 は直ちに得られる.

【補足 2】abc 予想の他の類似物：
複素関数の値分布理論である「Nevanlinna 理論」の第二主要定理
(1925 年に証明されている)

§4 知られている事実

望月 (2021) 以前

定理 12 (Stewart–Yu, 2001)

全ての abc-triple (a, b, c) に対して

$$c \leq e^{\kappa N^{1/3}(\log N)^3} \qquad \text{(ただし, } N = \mathrm{rad}(abc)\text{)}$$

が成り立つような定数 $\kappa > 0$ が存在する.

下からの評価：

定理 13 (Stewart-Tijdeman, 1986)

$\delta > 0$ とする. 次を満たす abc-triple は無限に存在する:

$$c > N \exp\left((4-\delta)\frac{\sqrt{\log N}}{\log\log N}\right).$$

※ abc 予想：$c < K_\varepsilon N^{1+\varepsilon} = K_\varepsilon N \exp(\varepsilon \log N)$

望月 (2021) 以後

定理 14 (abc 予想 (Mochizuki, 2021))

ε を任意の正数とする．このとき，全ての abc-triple に対して

$$c < K_\varepsilon \{\mathrm{rad}(abc)\}^{1+\varepsilon}$$

が成り立つような定数 $K_\varepsilon \geq 1$ が存在する．

定理 15 (Mochizuki-Fesenko-Hoshi-Minamide-Porowski, 2022)

$0 < \varepsilon \leq 1$ とする．このとき，全ての abc-triple に対して

$$\begin{aligned} c &\leq 2^{\frac{5}{2}} \max\left\{\exp(8.5 \times 10^{29} \times \varepsilon^{-166/81}),\ \{\mathrm{rad}(abc)\}^{\frac{3}{2}(1+\varepsilon)}\right\} \\ &\leq 2^{\frac{5}{2}} \exp(8.5 \times 10^{29} \times \varepsilon^{-166/81})\{\mathrm{rad}(abc)\}^{\frac{3}{2}(1+\varepsilon)} \end{aligned}$$

が成り立つ．

$\rightarrow$ 「Fermat の最終定理」の新証明，「一般化 Fermat 方程式」への応用

§5 abc 予想の改良

予想 7 (強い abc 予想 (Robert-Stewart-Tenenbaum, 2014))

全ての abc-triple (a, b, c) が

$$c < N \exp\left(4\sqrt{\frac{3\log N}{\log\log N}}\left(1 + \frac{\log\log\log N}{2\log N} + \frac{C_1}{\log\log N}\right)\right)$$

を満たすような実数 C_1 が存在する．ただし，$N = \mathrm{rad}(abc)$ とする．

※ abc 予想：$c < K_\varepsilon N^{1+\varepsilon} = K_\varepsilon N \exp(\varepsilon \log N)$

更に，Robert-Stewart-Tenenbaum は，同じ論文で次も予想している：

無限個の abc-triple (a, b, c) が

$$c > N \exp\left(4\sqrt{\frac{3\log N}{\log\log N}}\left(1 + \frac{\log\log\log N}{2\log N} + \frac{C_2}{\log\log N}\right)\right)$$

を満たすような実数 C_2 が存在する．

予想 8 (明示的 abc 予想 (Baker, 2004))

abc-triple (a, b, c) は, $N := \mathrm{rad}(abc) > 2$ のとき [1],

$$c < \frac{6}{5} \frac{N(\log N)^{\omega}}{\omega!}$$

を満たす. ただし, ω は $N = \mathrm{rad}(abc)$ の素因数の個数である.

この予想から, 予想 2(abc 予想 (簡潔版)) が従うことは, 簡単な計算によって分かるが, 更に深い事実が証明できる：

定理 16

予想 8 の下で, 任意の abc-triple (a, b, c) に対して, 以下が成り立つ:

(1) $c < \{\mathrm{rad}(abc)\}^{1.7}$ (Chim-Nair-Shorey, 2018)

(2) $c < 32\{\mathrm{rad}(abc)\}^{1.6}$ (Chim-Shorey-Sinha, 2019)

[1] $N \leq 2 \Leftrightarrow (a, b, c) = (1, 1, 2)$. このとき, 右辺は $1.663 \cdots$ で不成立.

まとめ

abc 予想：「かけ算」と「たし算」の間にある奥深い規則性を定式化したもの

広範囲にわたる応用：Fermat の最終定理, Siegel の定理 (S-単数の方程式), Erdös-Mollin-Walsh 予想 (多冪数), Roth の定理 (代数的無理数の近似), Faltings の定理 (有理数解の有限性), 数論的力学 (原始素数の無限性) など

起源：楕円曲線に関する Szpiro 予想, abc 予想の多項式類似である Mason-Stothers の定理

知られている事実：Mochizuki(2021) により abc 予想は証明済み. Mochizuki 等 (2022) により $K_\varepsilon(\varepsilon > 0.5)$ を具体的に評価.

改良 Robert-Stewart-Tenenbaum(2014) により, より精密な予想が提出. Baker(2004) による明示的な予想もあり.

参考文献 (読書案内)

スライドを作成する上で, 頻繁に参考にしたもの：

- 安福悠,『発見・予想を積み重ねる — それが整数論』, オーム社
- せきゅーん, INTEGERS, https://integers.hatenablog.com/

本講演より内容が平易なもの：

- 小山信也,『日本一わかりやすい ABC 予想』, ビジネス教育出版社

Szpiro 予想や多項式版 abc 定理について解説が詳しいもの：

- 黒川信重・小山信也,『ABC 予想入門』, PHP 研究所