2次元$O(3)$シグマ模型における異常次元の非摂動的評価

佐々木 潔 (日本工大、千葉工大)

Collabolater :
Sergio CALLE JIMENEZ (東工大)
岡 眞 (原研)

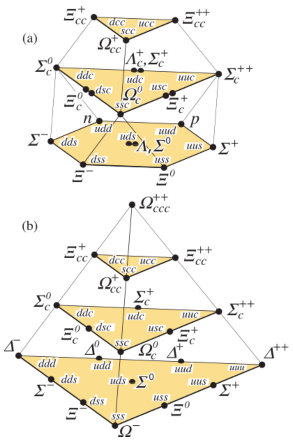
Reference : Phys.Rev.**D97** (2018) 114506 (arXiv:1802.01140 [hep-lat])

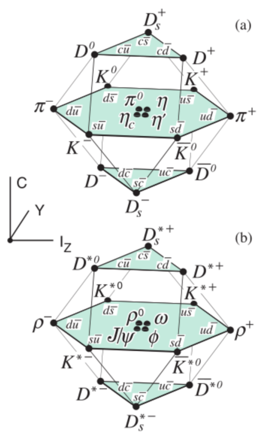
はじめに

本研究は、量子色力学(QCD, クォークとグルーオンの動力学を記述する理論)
を使いませんが、研究手法はその分野で培われてきたものを使います。
このため、QCD絡みの話も出ますので、最低限必要な事を説明しておきます。

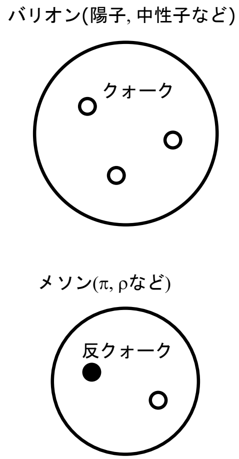
ハドロン物理とQCD

60年代： 多数のハドロン(原子核の構成粒子とその仲間)が実験で見つかり、
群論から、$3q$のバリオン、$\bar{q}q$のメソンという描像が提案された。
Δ粒子のフェルミ粒子性を保証するために、カラーが導入された。
70年代： 非可換ゲージ理論の繰り込み可能性。漸近自由性。
カラー電荷はグルーオン(ゲージ場)によってやりとりされる $\Rightarrow$ QCD





PDG, PRD98 (2018) 030001.

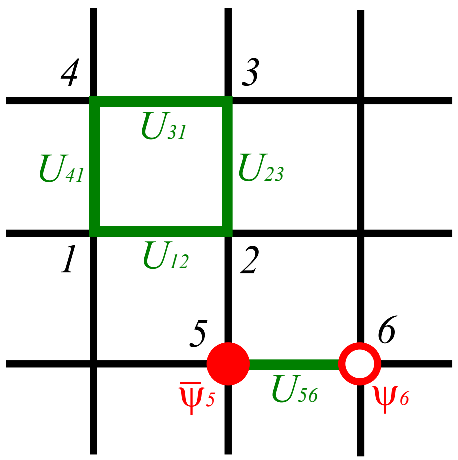


格子場の理論

1974：強結合極限*におけるクォーク閉じ込め (K. Wilson)

* 漸近自由性より連続理論は弱結合極限に対応している事に注意。

1982：モンテカルロ法を用いた数値計算 (M. Creutz)



ゲージ場：$U_{ij} = e^{igA_{ij}}$

マター場：ψ_i, $\bar{\psi}_i$

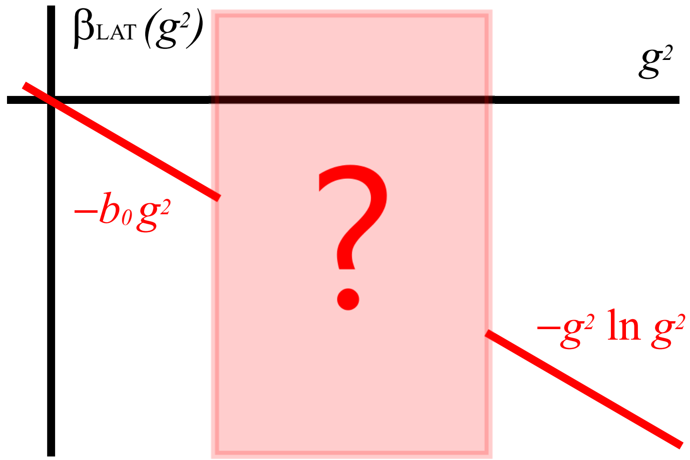
$$S_g = \sum U_{12}U_{23}U_{34}U_{41}$$

$$S_m = \sum \bar{\psi}_5 U_{56} \psi_6$$

これらの作用は次のゲージ変換の下で不変：

$$U_{ij} \to V_i\, U_{ij}\, V_j^{-1}$$

$$\psi_i \to V_i\, \psi_i$$



$\beta_{\rm LAT}(g^2) \equiv -a(dg^2/da)$

連続極限 $(a \to 0)$ で g^2 も減少。

数値的には、弱結合領域と強結合領域の間に相転移がない事が示されている。

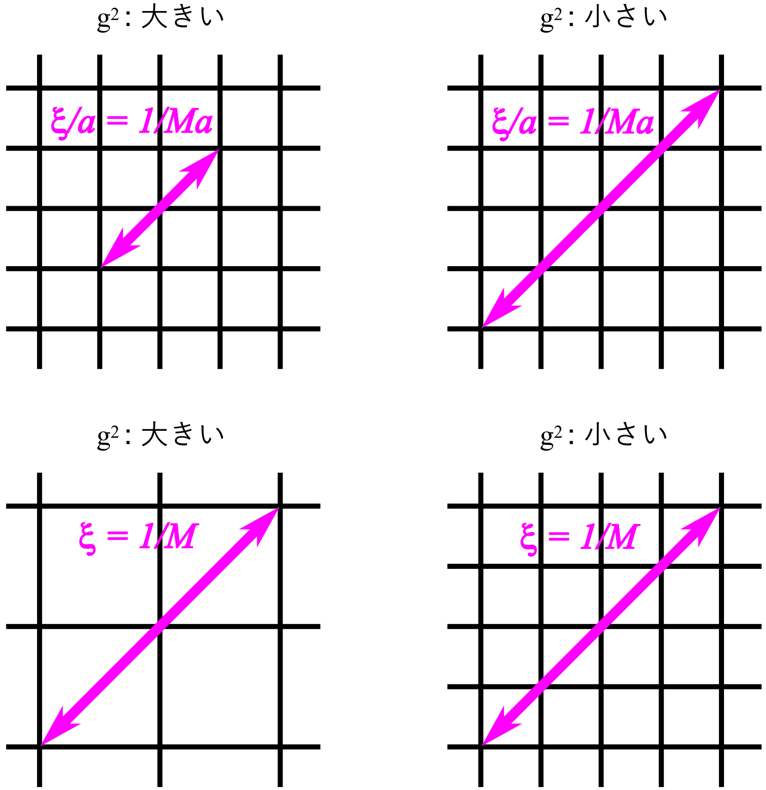
連続極限に関する補足

簡単のため、マター場を含まない $SU(n)$ ゲージ理論を考える。
$\Rightarrow$ 理論のパラメータはベア結合定数 g と格子点数 $(\hat{L}, \hat{T}) = (L/a, T/a)$ のみ。

格子間隔を直接設定出来ない事に注意！

この理論のマスギャップ(グルーボールの質量)M を考える。

格子上で実測されるのは、格子単位の Ma という量。(a は格子間隔)



十分大きなサイズの格子 $(\hat{L}, \hat{T} \gg 1)$ を用いれば、Ma (あるいは、格子単位の相関長 $\xi a = (Ma)^{-1}$) は g のみに依存。

物理的な $\xi = M^{-1}$ を固定して a を変化させたと解釈しても良い。

(あるいは、M の実測値から a を決定)

繰り込み群に関する補足

先程出て来た$\beta_{\mathrm{LAT}}(g^2)$は、格子理論の$\beta$関数であった。
連続理論のβ関数$\beta(g_{\mathrm{R}}^2)$との関係について説明する。

繰り込まれた結合定数 $g_{\mathrm{R}}^2(g^2,\mu a)$：

* 無次元のベア結合定数g^2とμaのみに依存。
* μは、繰り込みによって人為的に導入されるスケール。
* 簡単のため、質量パラメータのない理論を想定している。

この時、二つのβ関数は次のようにして関係づけられる：

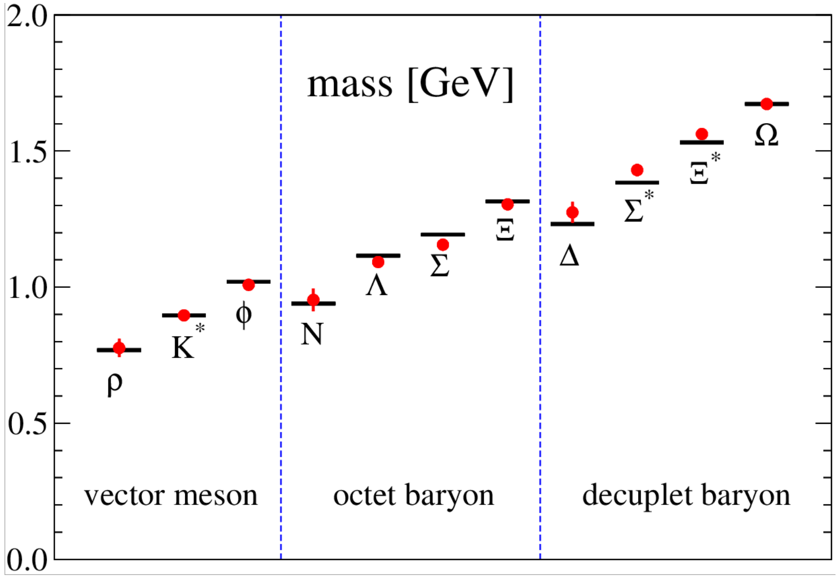
$$0 = a\frac{dg_{\mathrm{R}}^2}{da} = a\frac{\partial g_{\mathrm{R}}^2}{\partial a} + a\frac{dg^2}{da}\frac{\partial g_{\mathrm{R}}^2}{\partial g^2} = \mu\frac{\partial g_{\mathrm{R}}^2}{\partial \mu} - \beta_{\mathrm{LAT}}(g^2)\frac{\partial g_{\mathrm{R}}^2}{\partial g^2}$$

$$\therefore \quad \beta(g_{\mathrm{R}}^2) \equiv \mu\frac{\partial g_{\mathrm{R}}^2}{\partial \mu} = \beta_{\mathrm{LAT}}(g^2)\frac{\partial g_{\mathrm{R}}^2}{\partial g^2}$$

摂動展開である以上、$g_{\mathrm{R}}^2 = g^2 + \mathcal{O}(g^4)$ でなければならないので、上記の結果とあわせて、$\beta_{\mathrm{LAT}}(g^2)$と$\beta(g_{\mathrm{R}}^2)$ の摂動展開の係数の違いは、第三項以降からしか現れない。

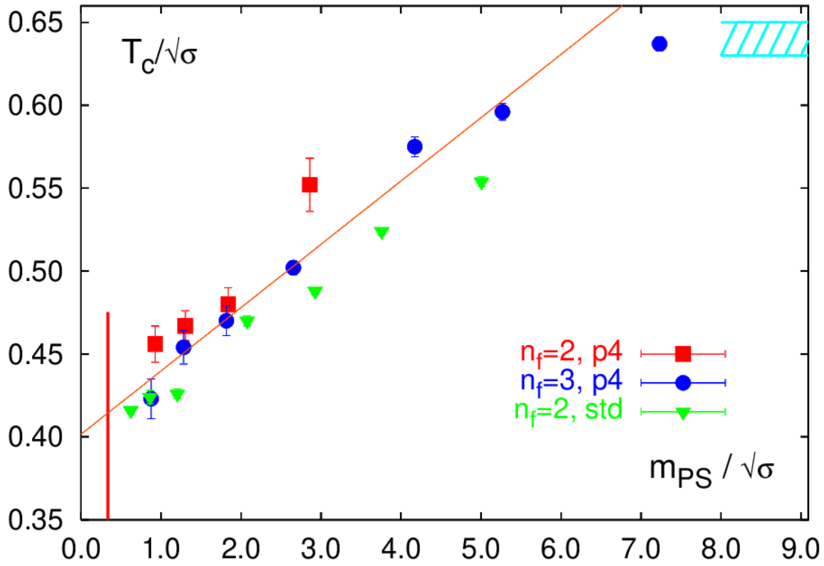
格子場の理論における計算例

軽いハドロンの質量計算



PACS-CS Colllab., PRD79 (2009) 034503

閉じ込め・非閉じ込め相転移



Karsch, Laermann and Peikert, NPB605 (2001) 579

$$\Rightarrow \quad T_c = 173(8)\,\mathrm{MeV}\ (N_f = 2)$$
$$T_c = 154(8)\,\mathrm{MeV}\ (N_f = 3)$$

有限体積における(連続)場の理論

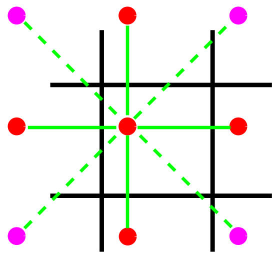
格子場の分野では、もう一つの側面として有限体積性を考える事が多い。
箱のサイズに対する系の応答から、無限体積での情報を取り出すのである。

1986 : 二粒子系の散乱位相差 (M. Lüscher)
1991 : 結合定数のスケール依存性 (M. Lüscher *et al.*)

有限体積効果

2つの起源がある

1. 境界を経由しての相互作用

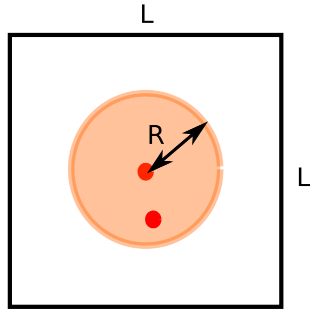


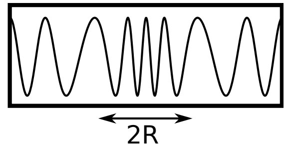
(1粒子系の場合)

最近接の箱のみだが、相互作用効果を摂動の全次数で取り込んだ質量公式が与えられている:

$$m(L) - m = -\frac{3g^3}{16\pi m^2 L}\,\mathrm{e}^{-(\sqrt{3}/2)mL} + (\text{高次項})$$

2. 境界条件に適合する波動関数の選択





散乱状態に関しては、より大きな有限体積効果がある:

$$E(L) - 2m = -\frac{4\pi a_0}{mL^3} + (\text{高次項})$$

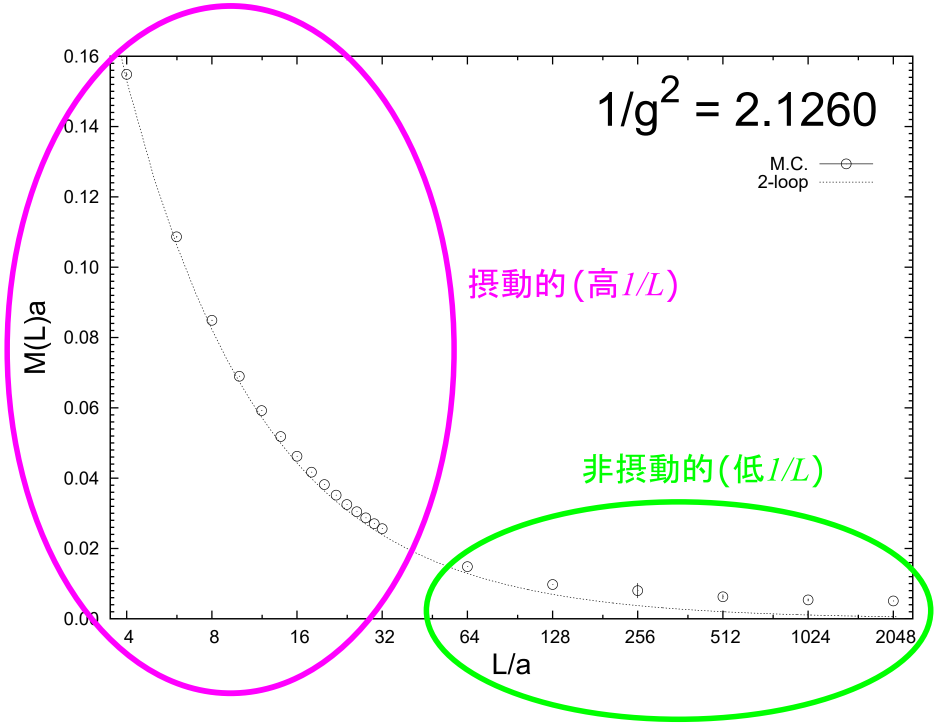
その本質は1次元の話から理解可能:

$$kL + \delta(k) = 2\pi \cdot n \quad (n \in \mathbf{Z})$$

$\delta(k)$ を正しく評価するには、条件 $R < L/2$ が必要。

境界を経由しての相互作用 (シグマ模型での実例)

2次元$O(3)$シグマ模型のマスギャップ$M(L)$のL依存性を格子単位で示す：



摂動評価： $$M(L)a = \frac{n-1}{2(L/a)} \cdot \left[\, g^2_{\mathrm{MS}}(\mu) + x_1(\mu L)\cdot g^4_{\mathrm{MS}}(\mu) + x_2(\mu L)\cdot g^6_{\mathrm{MS}}(\mu) + \cdots \,\right]$$

$$x_1(\mu L) = \tfrac{n-2}{4\pi}\cdot\left[\, 2\ln(\mu L) - \ln 4\pi - \Gamma'(1)\,\right]$$

$$x_2(\mu L) = x_1^2 + \tfrac{x_1}{2\pi} + \tfrac{3}{4}\tfrac{n-2}{(2\pi)^2}$$

$g^2_{\mathrm{MS}} + x_1\cdot g^4_{\mathrm{MS}} + \cdots$ から、Lに線形な振る舞いを解析的に得るのは難しい。

境界条件に適合する波動関数の選択 (散乱位相差の評価)

$$(\tan\delta_0(k)/k)^{-1} = \frac{1}{\pi L} \cdot \mathcal{Z}\left(1, \frac{k^2}{(2\pi/L)^2}\right) \qquad \left(\mathcal{Z}(s,\bar{n}) \equiv \sum_{\vec{m}\in\mathbf{Z}^3} \frac{1}{(m^2-\bar{n})^s} \right)$$

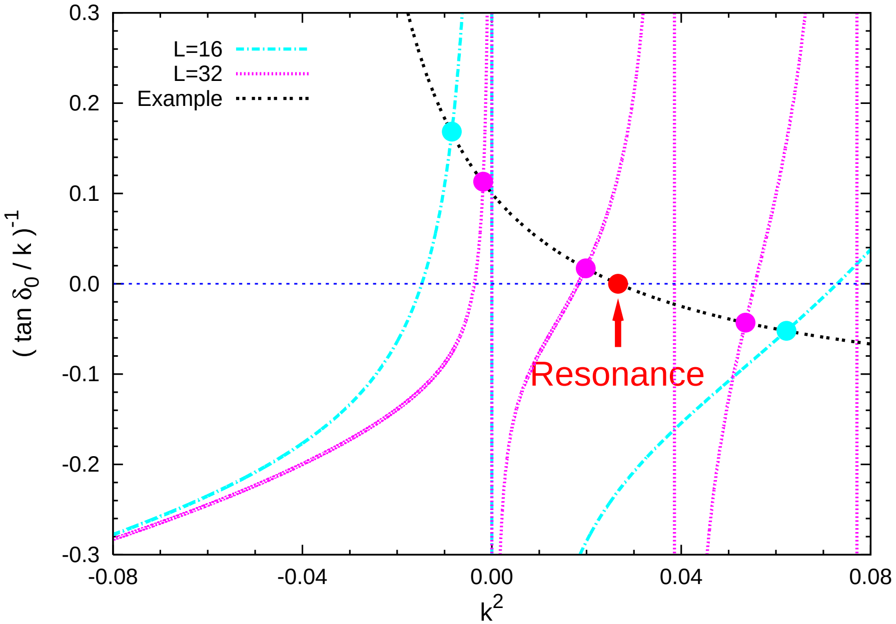
(k は、$E = \sqrt{m_1^2 + k^2} + \sqrt{m_2^2 + k^2}$ を満たす運動量)

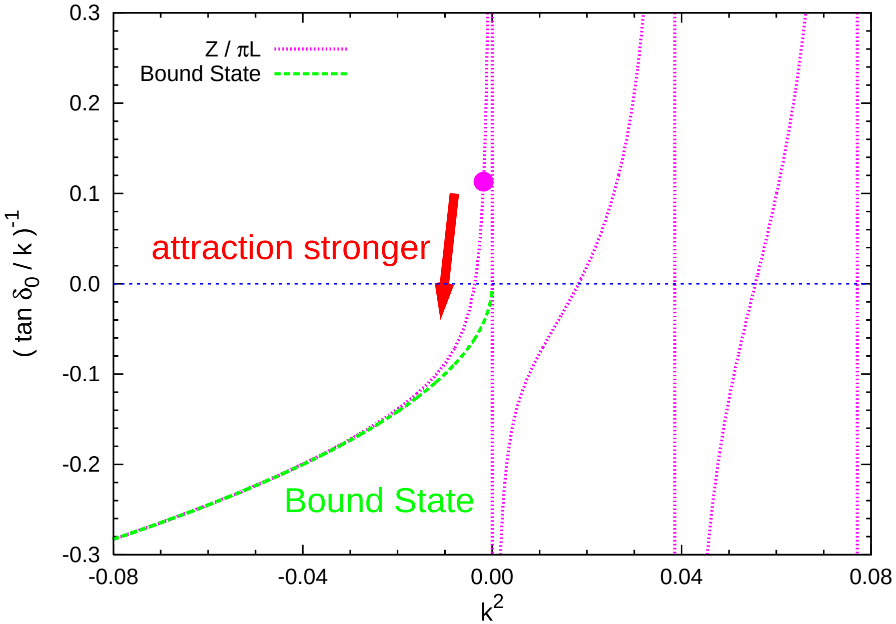
$k^2 \geq 0 \qquad (\tan\delta_0(k)/k)^{-1} \to \infty$: 相互作用自由な二粒子状態 $\quad (k^2 = (2\pi/L)^2 \cdot n,\ n \in \mathbf{Z})$

$\to\ 0$: 共鳴状態 (Breit-Wigner 型)

$k^2 < 0$ 束縛状態は、$\tan\delta_0(k) = -i$ で記述される. $\quad (S = (\tan\delta_0 - i)/(\tan\delta_0 + i))$

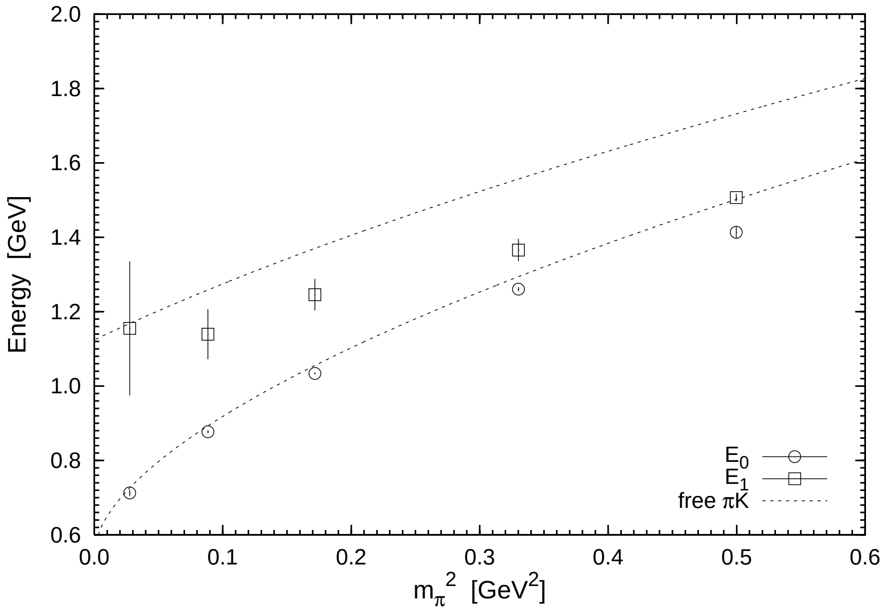
$(\tan\delta_0(k)/k)^{-1} \to -\sqrt{-k^2}$

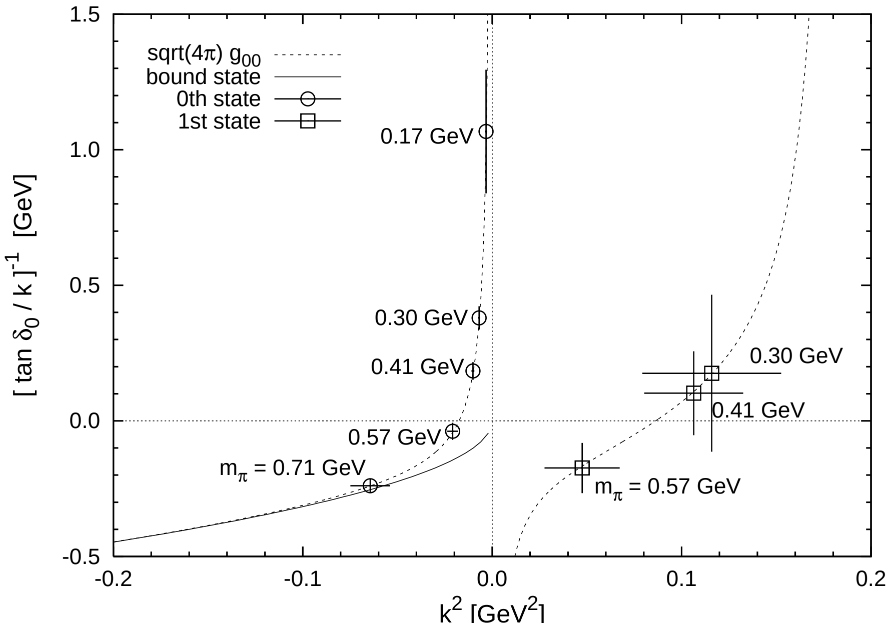




散乱位相差 (QCDでの実例)

S-波 $\pi K(I=1/2)$ 系のエネルギー固有値と散乱位相差：





Sasaki *et al.*, PRD89 (2014) 054502

最も重いm_πで $\tan\delta_0 \simeq -i$ （非物理的な領域ではあるが、束縛状態がありそう）

厳密には、エネルギー固有値の体積依存性を調べる必要がある。

なお、上記の研究では、$m_\pi = 0.17$ GeVのデータを用いて散乱長を決定した：

$$a_0\,\mu_{\pi K} = 0.142(14)(27)$$

研究の動機

系を、有限サイズ(L)の箱中に置く事を想像する。

疑問：
(a) 有限Lでの挙動から、$L \to \infty$の情報を抽出する事は可能か？
(b) $L \to \infty$の情報から、有限Lでの挙動を再構築する事は可能か？
可能なら、$L \to \infty$に関するどんな情報があれば、その再構築に十分か？

いくつかの量については、(a)の解がLüscher *et al.*により与えられている。
$\Rightarrow$ 散乱位相差 ('86), 結合定数のスケール依存性 ('91).

Lüscher *et al.*による方法は格子場のコミュニティで広く使われている。

我々の最終目標は、疑問(b)に答える事である。
我々の予想は次の通り：
Lの変化に対する系の応答を記述する繰り込み群(RG)方程式がある。

しかし、まだ最終的な結論に到達していない。
本研究は、2次元$O(3)$シグマ模型に話を絞り、上記のRG方程式に必要になると考えられる、通常のβ関数、異常次元の非摂動的な評価を行った。

RG方程式

前頁で、唐突にRG方程式が出てきたように思うので補足する。

ベアなN点関数 $G(g^2;\boldsymbol{p}) = Z^{N/2}\cdot G_{\rm R}(\mu, g_{\rm R}^2;\boldsymbol{p})$ は、繰り込み点μに依らない：

$$0 = \mu\frac{d}{d\mu}G(g^2;\boldsymbol{p}) = Z^{N/2}\cdot\left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta(g_R^2)\,\frac{\partial}{\partial g_{\rm R}^2} + \frac{N}{2}\,\gamma(g_R^2)\right]G_{\rm R}(\mu, g_R^2;\boldsymbol{p})$$

$$\therefore\quad \left[\mu\frac{\partial}{\partial\mu} + \beta(g_R^2)\,\frac{\partial}{\partial g_{\rm R}^2} + \frac{N}{2}\,\gamma(g_R^2)\right]G_{\rm R}(\mu, g_R^2;\boldsymbol{p}) = 0$$

なお、ここで、$\beta(g_{\rm R}^2) \equiv \mu\dfrac{d\,g_{\rm R}^2(\mu)}{d\mu},\ \gamma(g_{\rm R}^2) \equiv \mu\dfrac{d\ln Z(\mu)}{d\mu}$ としている。

Lüscher *et al.* は、「結合定数のスケール依存性」の研究において、$\mu = 1/L$と設定した上で、$\beta(g_{\rm R}^2) = -L\dfrac{d\,g_{\rm R}^2(L)}{dL}$ に基づいた上で、上記の研究を行った。

しかし、有限体積では、ベアなN点関数G自体がLに依るため、

$$\left[-L\frac{\partial}{\partial L} + \beta(g_R^2)\,\frac{\partial}{\partial g_{\rm R}^2} + \frac{N}{2}\,\gamma(g_R^2)\right]G_{\rm R}(\mu, g_R^2;\boldsymbol{p}) = 0$$

は成立しない。

2次元$O(n)$シグマ模型

2次元$O(n)$シグマ模型の基本的な事柄についてまとめておく。

ラグランジアン：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2g^2}\,\partial_\mu \boldsymbol{\phi} \cdot \partial^\mu \boldsymbol{\phi} \qquad (\mu = 0, 1, \ \ \boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\phi} = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \phi_i^2 = 1)\ .$$

(拘束条件が相互作用を生み出している事に注意)

2次元$O(n)$シグマ模型はQCDと共通の特徴を持っている:

* 漸近自由性
* マスギャップ

対称性が破れてNGモードが出ると思うかもしれない。なぜマッシブなのか？
$\Rightarrow$ 2次元では、Mermin-Wagnerの定理が長距離秩序を禁止する。
その結果、2次元$O(n)$シグマ模型はNGモードを持てない。

格子$O(3)$シグマ模型のモンテカルロ計算 (配位生成)

差分化されたラグランジアン：

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2g^2}\big(\boldsymbol{\phi}(x+\hat{\mu}) - \boldsymbol{\phi}(x)\big)^2 = -\frac{1}{g^2}\boldsymbol{\phi}(x+\hat{\mu})\cdot\boldsymbol{\phi}(x) + (\text{定数}) \ .$$

熱浴法(スピン配位$\phi(x)$の更新アルゴリズム)

新しい配位C'を前の配位Cと無関係に生成する方法： $P[C \to C'] \propto \mathrm{e}^{-S[C']}$

格子点xに着目して

$$\mathcal{L} \sim -\frac{1}{g^2}\boldsymbol{\phi}(x)\cdot\boldsymbol{m}(x) \qquad \left(\boldsymbol{m}(x) = \sum_{\mu=\pm0,\pm1}\boldsymbol{\phi}(x+\hat{\mu})\right) \ .$$

$\boldsymbol{m}$方向をz軸とする極座標で、$\boldsymbol{\phi} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$ と表せば、

$$P(\theta,\phi)d(\cos\theta)d\varphi = \frac{d(\cos\theta)d\varphi\ \mathrm{e}^{(m/g^2)\cos\theta}}{\int d(\cos\theta)d\varphi\ \mathrm{e}^{(m/g^2)\cos\theta}} \ .$$

$[0,1]$の一様乱数r_φ, r_θに対して、

$$r_\varphi = \frac{\int_0^\varphi\ d\varphi'}{\int_0^{2\pi} d\varphi'} \equiv F_1(\varphi) \ , \quad r_\theta = \frac{\int_0^\theta\ d(\cos\theta')\ \mathrm{e}^{(m/g^2)\cos\theta'}}{\int_0^{2\pi} d(\cos\theta')\ \mathrm{e}^{(m/g^2)\cos\theta'}} \equiv F_2(\theta)$$

を逆解きし、$\varphi = F_1^{-1}(r_\varphi)$, $\theta = F_2^{-1}(r_\theta)$ を決定する。

格子 $O(3)$ シグマ模型のモンテカルロ計算 (物理量の計算)

$O(3)$ 不変な 2 点グリーン関数

$$G_{\rm inv}(x,y) = \langle \boldsymbol{\phi}(x)\cdot\boldsymbol{\phi}(y)\rangle$$

$O(3)$ 不変性は、摂動計算で赤外発散を避けるために必要

実際には、空間平均を取った、次の量を計算している：

$$G_{\rm inv}(x_0,y_0) = \frac{1}{L^2}\int dx_1 dy_1\ \mathrm{e}^{-ip_1(y_1-x_1)}\, G_{\rm inv}(x,y)\Big|_{p_1=0}$$

この量は、Nuemann 境界条件の下で、次の形に書ける：

$$G_{\rm inv}(x_0,y_0) = A\mathrm{e}^{-M\,|y_0-x_0|} + \mathcal{O}(\mathrm{e}^{-(4\pi/L)\,|y_0-x_0|})$$

我々の目的において、マスギャップ M と振幅 A が必要となる

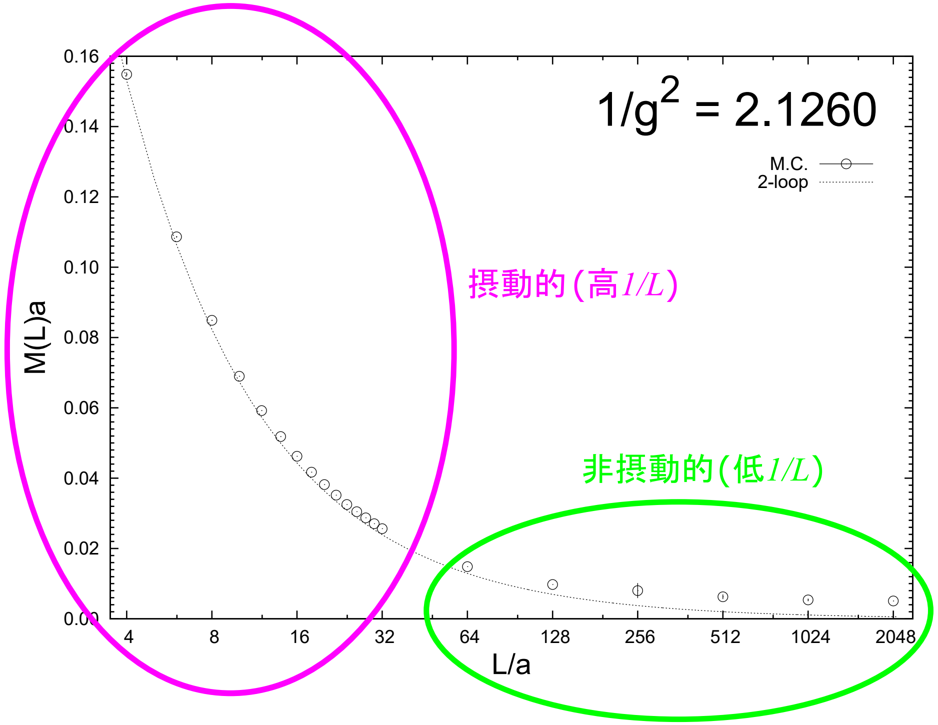
Neumann 境界条件 (時間方向のみ)

境界上で $O(3)$ 不変な状態を作り、$G_{\rm inv}(x_0,y_0)$ からスピン 1 状態以外を落とす。

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\boldsymbol{\phi}(x_0,x_1) = 0 \quad (x_0\in\partial\Lambda_\tau)\ , \qquad \boldsymbol{\phi}(x_0,x_1+Ln) = \boldsymbol{\phi}(x_0,x_1) \quad (n\in\mathbf{Z})$$

境界を経由しての相互作用 (シグマ模型での実例)

2 次元 $O(3)$ シグマ模型のマスギャップ $M(L)$ の L 依存性を格子単位で示す：



摂動評価： $$M(L)a = \frac{n-1}{2(L/a)} \cdot \left[\, g^2_{\mathrm{MS}}(\mu) + x_1(\mu L)\cdot g^4_{\mathrm{MS}}(\mu) + x_2(\mu L)\cdot g^6_{\mathrm{MS}}(\mu) + \cdots \,\right]$$

$$x_1(\mu L) = \tfrac{n-2}{4\pi}\cdot\left[\, 2\ln(\mu L) - \ln 4\pi - \Gamma'(1)\,\right]$$

$$x_2(\mu L) = x_1^2 + \tfrac{x_1}{2\pi} + \tfrac{3}{4}\tfrac{n-2}{(2\pi)^2}$$

$g^2_{\mathrm{MS}} + x_1 \cdot g^4_{\mathrm{MS}} + \cdots$ から、L に線形な振る舞いを解析的に得るのは難しい。

Lüscher *et al.* の繰り込みスキーム ('91)

非摂動的に、β 関数、異常次元を評価するにはどうしたら良いか？
結合定数のスケール依存性については、Lüscher *et al.* によって議論がなされた。

ポイントは、数値的に計算可能な形で g_{R}^2 を定義する事： $M(L)a = \frac{n-1}{2(L/a)} \cdot g_{\mathrm{FV}}^2(L)$
この定義は、繰り込みスキームを次の式で変換する事に他ならない：

$$g_{\mathrm{FV}}^2 = g_{\mathrm{MS}}^2 + x_1(\mu L)|_{\mu=1/L} \cdot g_{\mathrm{MS}}^4 + x_2(\mu L)|_{\mu=1/L} \cdot g_{\mathrm{MS}}^6 + \cdots$$

このとき、典型的なスケールは $\mu = 1/L$ となり、新しい β 関数が導入される：

$$\beta_{\mathrm{FV}}(g_{\mathrm{FV}}^2) \equiv -L\frac{dg_{\mathrm{FV}}^2(L)}{dL} \qquad \left(c.f. \;\; \beta_{\mathrm{MS}}(g_{\mathrm{MS}}^2) \equiv \mu\frac{dg_{\mathrm{MS}}^2(\mu)}{d\mu} \right)$$

モンテカルロ計算で $g_{\mathrm{FV}}^2(L)$ を得る事の困難はない。
ステップ・スケーリング関数(SSF)も導入する：

$$g_{\mathrm{FV}}^2(sL) = \sigma^g(s, g_{\mathrm{FV}}^2(L))$$

これは、β 関数と次の式で関係付けられる： $\beta_{\mathrm{FV}}(\,\sigma^g(s, g_{\mathrm{FV}}^2)\,) = -s \cdot \frac{\partial\, \sigma^g(s, g_{\mathrm{FV}}^2)}{\partial s}$

Z 因子に関するSSF

Z 因子のスケール依存性について、Lüscher *et al.* は何も言っていない。
$\Rightarrow$ 我々はこれを研究する事にした。

2 点関数 $G_{\mathrm{inv}}(x_0, y_0) = A\mathrm{e}^{-M|y_0 - x_0|}$ の振幅 A を用いて、Z 因子を次で定義する：
$Z^{\phi}_{\mathrm{FV}}(\mu)\,|_{\mu=1/L} = A(L)$

Z 因子に関する SSF を導入する：

$$Z^{\phi}_{\mathrm{FV}}(sL) = \sigma^{\phi}(s, g^2_{\mathrm{FV}}(L)) \cdot Z^{\phi}_{\mathrm{FV}}(L)$$

この定義は、質量パラメータの繰り込みに関して、Capitani *et al.*, NPB544 (1999) 669
で用いられた方法に倣って導入した。

これは、異常次元と次の式で関係付けられる：$\gamma_{\mathrm{FV}}(\,\sigma^{g}(s, g^2_{\mathrm{FV}})\,) = -\dfrac{s}{2} \cdot \dfrac{\partial \ln \sigma^{\phi}(s, g^2_{\mathrm{FV}})}{\partial s}$

データ解析の手続き

繰り込まれた結合定数 $g^2_{\rm FV}$ を例にとって説明する。

連続理論では、$g^2_{\rm FV} = \frac{2L}{n-1}M(L)$ なので、$g^2_{\rm FV}$ は物理的なサイズ L のみの関数。
しかし、格子理論では、L に加えて格子間隔 a にも依る。

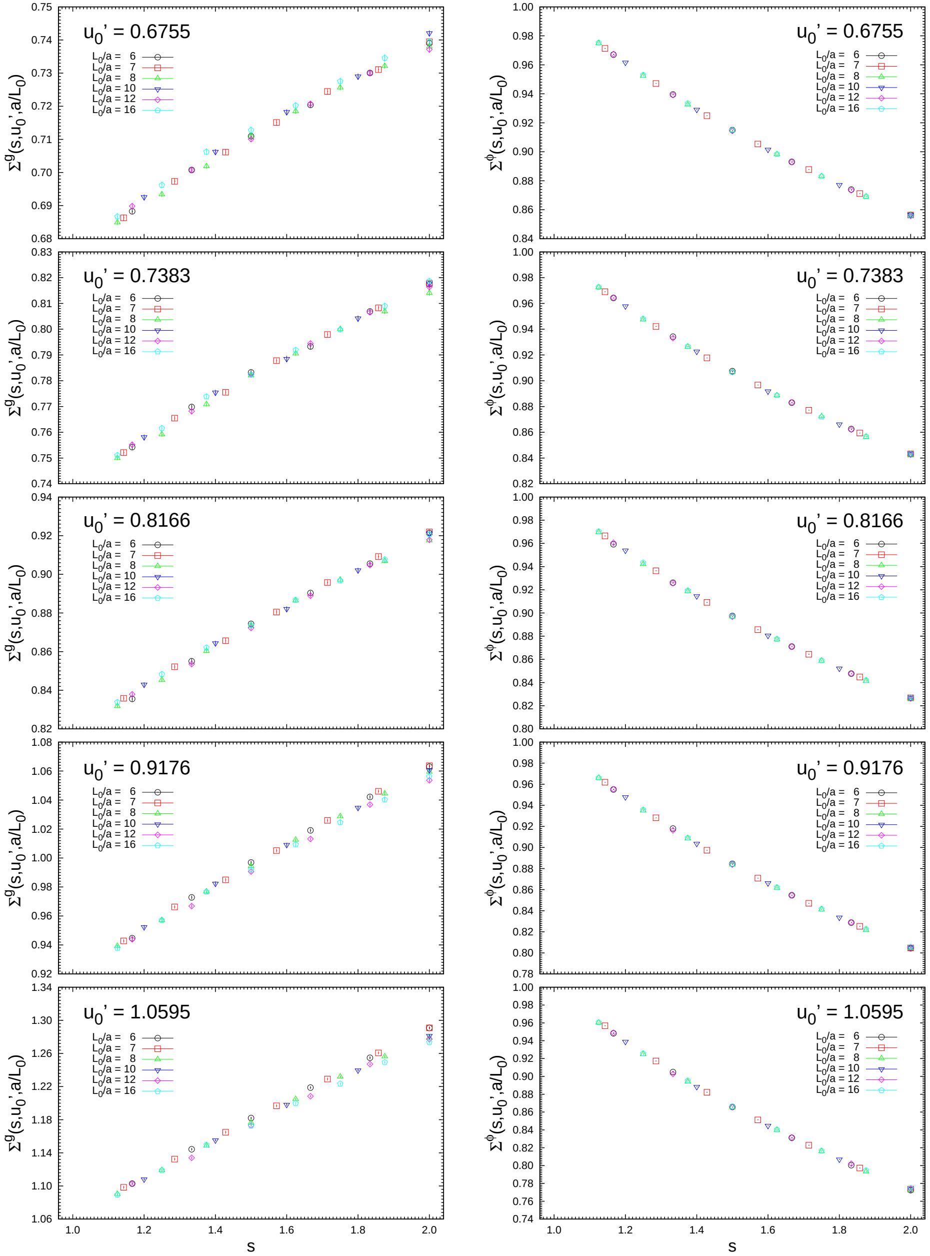
言い換えれば、ベアな結合定数 g^2 と格子点数 $\hat{L} \equiv L/a$ の両方に依存。

今の場合、$\hat{L} \gg 1$ とは限らないので、両方を考慮する必要がある。

手続きを簡略化して説明すると次の通り：

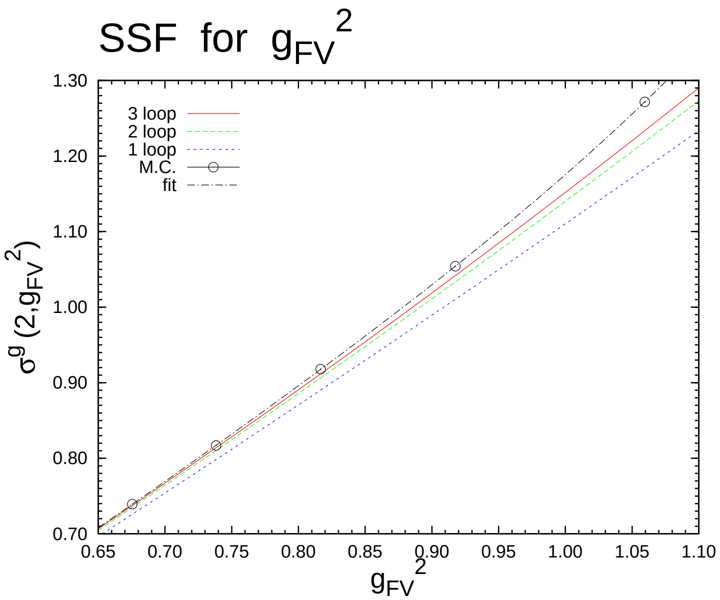
1. $g^2_{\rm FV}(g^2_1, \hat{L}_1) = g^2_{\rm FV}(g^2_2, \hat{L}_2)$ を満たす2組の $(g^2_i, \hat{L}_i)$ を探す
   $\Rightarrow$ 2組の $(g^2_i, \hat{L}_i)$ において、物理的なサイズ L が等しいという状況を作り出した。
   ただし、本当は、離散化誤差の影響が存在している。
2. 1で見出した $\bar{g}^2_{\rm FV} \equiv g^2_{\rm FV}(g^2_i, \hat{L}_i)$ を用いて、格子理論のSSFを評価した。
   $\Rightarrow$ $\Sigma^g(s, \bar{g}^2_{\rm FV}, 1/\hat{L}_i) = g^2_{\rm FV}(g^2_i, s\hat{L}_i)$ (例えば、$s = 2$ とかを用いる)
   離散化誤差の影響は、$g^2_{\rm FV}$ からではなく Σ^g から取り入れる。
3. 実際には、様々な $(g^2, \hat{L})$、s を用いて、グローバル・フィットを行った。
   結果、連続理論のSSFである $\sigma(s = 2, \bar{g}^2_{\rm FV})$ を得た。

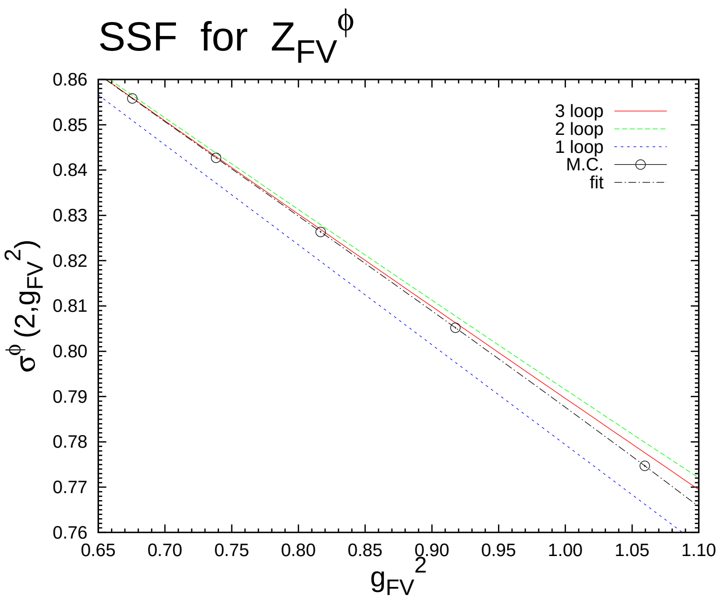
なお、Z 因子のSSFについても同様。



計算結果 (格子理論のSSF)

a/L_0依存性は小さく、全てのケースで、単一の曲線に乗る傾向にある。





計算結果 (連続理論のSSF)

$$\Sigma^g(s,u,a/L_0) = u + \sum_{ij} (\ln s)^i (a/L_0)^{2j}\, \Sigma^g_{ij}(u)$$
$$\Sigma^\phi(s,u,a/L_0) = 1 + \sum_{ij} (\ln s)^i (a/L_0)^{2j}\, \Sigma^\phi_{ij}(u)$$

($\Sigma^g_{ij}(u)$, $\Sigma^\phi_{ij}(u)$ が、フィット・パラメータ)

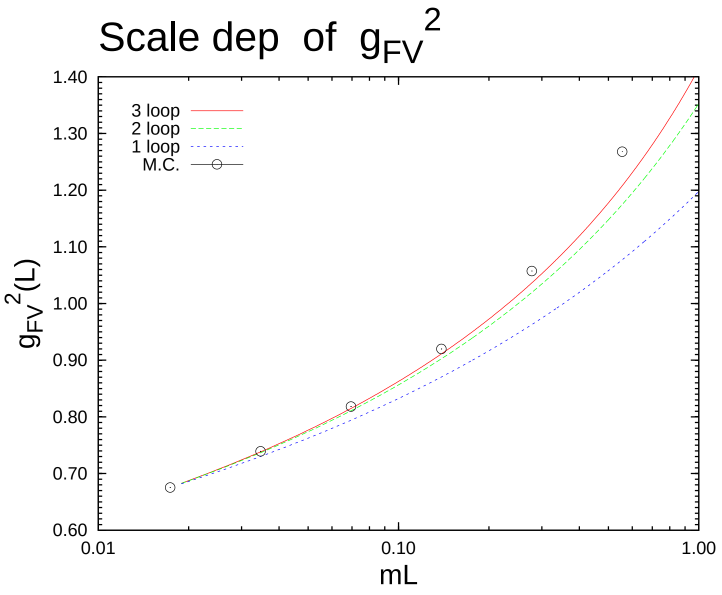
各 $u = g^2_{\mathrm{FV}}$ で、$(s, a/L_0) = (2, 0)$ とした結果が左図。
摂動計算の結果と無矛盾な挙動を示している。

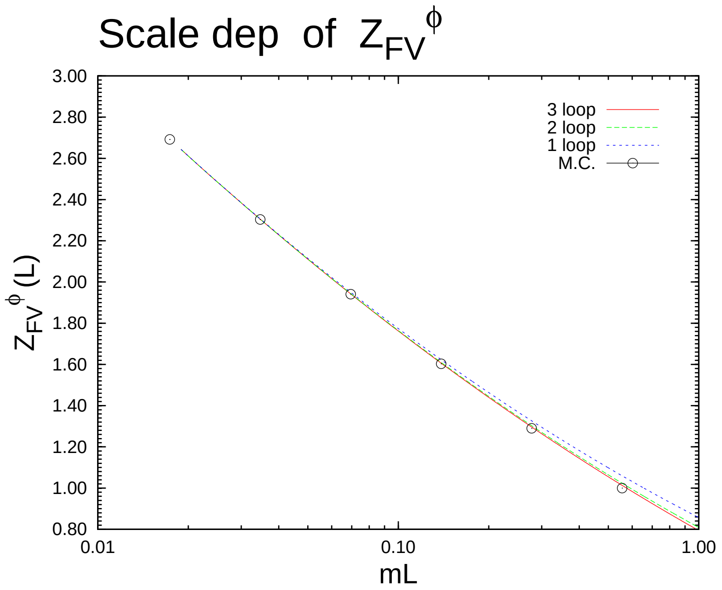
なお、摂動展開

$$\beta(u) = -\beta_0 u^2 + \beta_1 u^3 + \cdots$$
$$\gamma(u) = -\gamma_0 u + \gamma_1 u^2 + \cdots$$
$$\sigma^g(s,u) = u + \sigma^g_0(s) u^2 + \sigma^g_1(s) u^3 + \cdots$$
$$\sigma^\phi(s,u) = 1 + \sigma^\phi_0(s) u + \sigma^\phi_1(s) u^2 + \cdots$$

に対し、次が成立する事に注意：

$$\sigma^g_0(s) = \beta_0 \ln s,\ \sigma^g_1(s) = \beta_1 \ln s + \beta_0^2 (\ln s)^2, \cdots$$
$$\sigma^\phi_0(s) = \gamma_0 \ln s,$$
$$\sigma^\phi_1(s) = \gamma_1 \ln s + (1/2)(\beta_0 + \gamma_0)\gamma_0 (\ln s)^2, \cdots$$





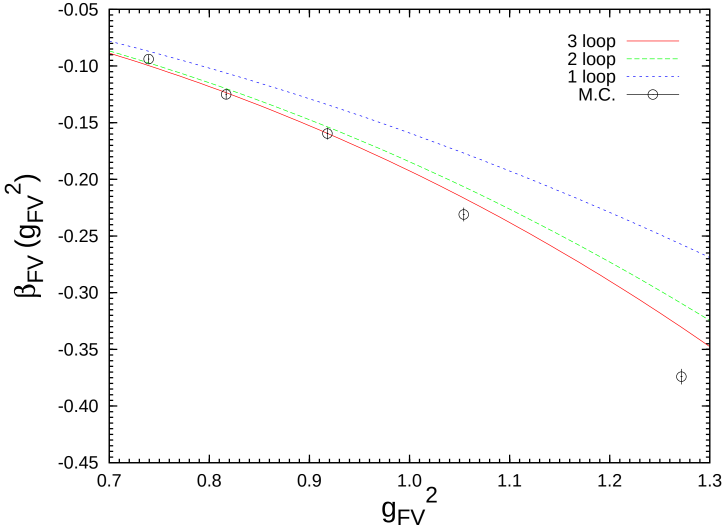
計算結果 (スケール依存性)

前項目のフィットで決めた $\sigma^g(2, g^2_{\rm FV})$, $\sigma^\phi(2, g^2_{\rm FV})$ を用いて、$g^2_{\rm FV}(2^{-k}L_{\rm max})$, $Z^\phi_{\rm FV}(2^{-k}L_{\rm max})$ を決定した。

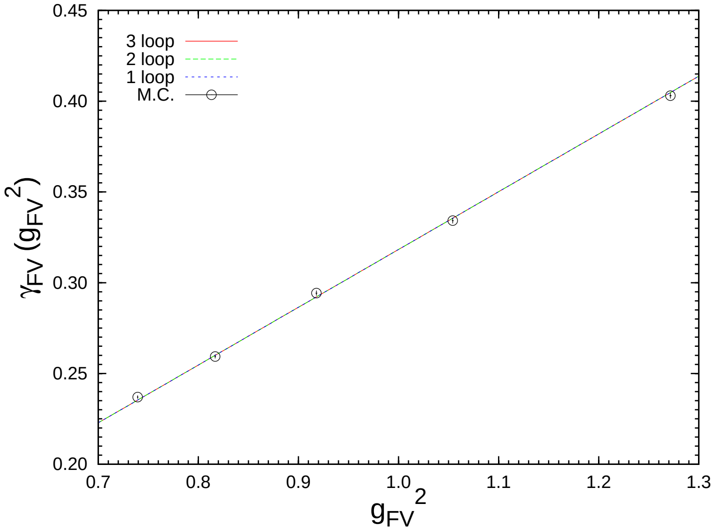
なお、$g^2_{\rm FV}(L_{\rm max})$=1.2680, $Z^\phi_{\rm FV}(L_{\rm max}) = 1.0$ と設定。($L_{\rm max}$ の値は文献値を採用)。

同図中には、摂動的な $\beta_{\rm FV}(g^2_{\rm FV})$, $\gamma_{\rm FV}(g^2_{\rm FV})$ を積分して得られる曲線も示してある。

β function



anomalous dimension



計算結果 (β関数と異常次元)

原理的には、$g_{\rm FV}^2(L)$, $Z_{\rm FV}^{\phi}(L)$ を L で微分するだけだが、数値的にこれを行うのは困難。

替わりに、

$$\beta_{\rm FV}(\,\sigma^g(2, g_{\rm FV}^2)\,) = -2 \cdot \frac{\partial\, \sigma^g(s, g_{\rm FV}^2)}{\partial s}\Big|_{s=2}$$

$$\gamma_{\rm FV}(\,\sigma^g(2, g_{\rm FV}^2)\,) = -\frac{\partial \ln \sigma^{\phi}(s, g_{\rm FV}^2)}{\partial s}\Big|_{s=2}$$

を用いた。
精度は良くないが、一応、評価は出来ている。

後日談：
レフェリーから β 関数を精度良く評価する方法を教わりました。
$\Rightarrow$ Della Morte *et al.*, NPB713 (2005) 378.

まとめ

2次元シグマ模型のβ関数と異常次元を評価した (モンテカルロ法と摂動論)

* ステップ・スケーリング関数
- Lüscher $et\ al.$ が結合定数について提案した方法を、Z 因子に適用した。
- モンテカルロ計算と摂動計算で無矛盾な結果を得た。
- SSF を用いて、結合定数と Z 因子のスケール依存性も評価した。

* β関数と異常次元
- β関数と異常次元は SSF の微分であるため、数値的評価が難しい。
- 精度は良くないが、β関数と異常次元の評価方法を開発した。
  (レフェリーによると、もっと良い方法があるそうです)。

* N 点関数に関する RG 方程式
- その構築に必要となると考えられるβ関数と異常次元は評価出来そう。
- N 点関数の RG 方程式自体は、未だ手つかず。