

デルタ展開と逆ラプラス変換： 強結合展開の連続極限近似への応用

千葉工業大学教育センター
山田宏文
2013年2月22日

- 1 そもそも
- 2 格子
- 3 デルタ展開
- 4 逆ラプラス変換
- 5 応用
- 6 課題など

1 そもそも

連続時空上でのYang-Mills場の非摂動的な性質をできるだけ解析的な方法で解き明かしたい

やっぱり格子で理論を定式化した方がいいのではないか

格子と言えば、強結合展開(高温展開)

K. G. Wilson (1974)

->クォークの閉じ込め

しかし問題は連続極限で定量的にどうなるか

強結合展開は魅力的(多分に感覚的に)なので、強結合展開をベースにして、連続極限の**近似**を考える

強結合 $\rightarrow g \gg 1$

g は裸の結合定数

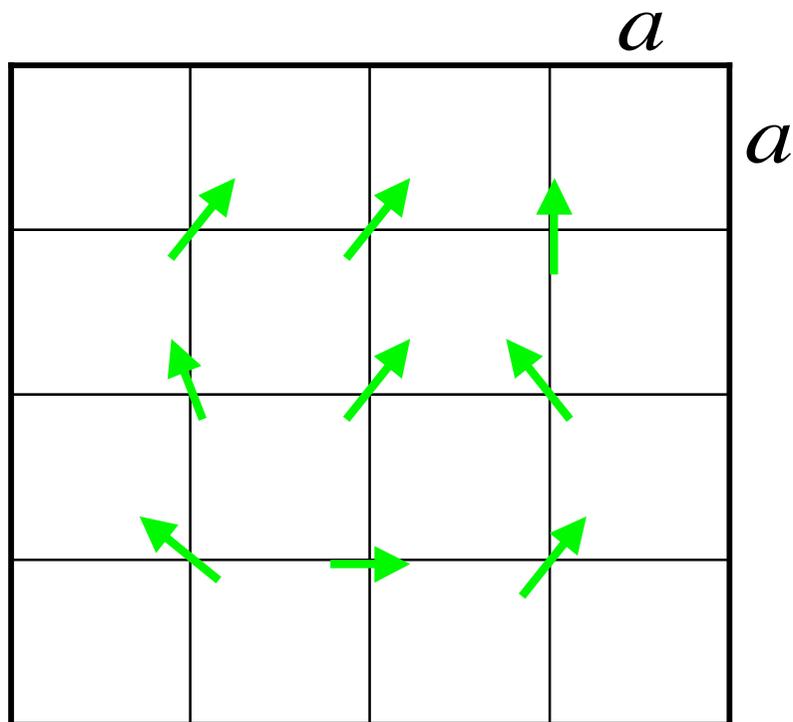
(格子上での強結合展開でくりこまれた計算の枠組みは不明と思われる。そもそも、くりこまれた結合定数では弱結合か強結合かはくりこみの点に応じて変化する-running coupling-ので、弱いとか強いとかははっきりとした意味付けは困難。

たえず、momentum transferや温度など環境パラメータと繰り込み点の比を意識する必要有り)

裸の量でも、物理的な結果が出せるものあり
質量ギャップ、弦定数などなど

2 格子

発散の正則化としての格子理論



例 非線形シグマ模型

$$S = -\beta \sum_{\langle i, j \rangle} \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j$$

$$\vec{s}_i^2 = N, \quad \beta = \frac{1}{g}$$

a は格子間隔

N は成分数, $N=1$ でイジング

離散化

$$S = \int d^2x \frac{1}{2g} (\partial_\mu \vec{s})^2$$

$$\int d^2x \rightarrow \sum_{\text{over all sites}} a^2, \quad \partial_x s^A \rightarrow \frac{s^A(x+a, y) - s^A(x, y)}{a}$$

$$S \rightarrow \sum_{\text{over all sites}} a^2 \frac{1}{2g} \frac{2}{a^2} \sum_{\mu=x,y} (N - \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j) = \text{const} - \frac{1}{g} \sum_{\langle i,j \rangle} \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j$$

- Sites i and j denote nearest neighbor pair
- $g \gg 1$ means that the nearest neighbor spin alignment is less important. Almost all configurations contribute the action averaging

g と相関関数 (g と a が如何にして関連づくか)

$$\beta \langle \vec{\sigma}_0 \cdot \vec{\sigma}_r \rangle = N \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^2 \mathbf{p}}{(2\pi)^2} \exp(-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}a) G(\mathbf{p}, \beta, a).$$

- $G(\mathbf{p}, \beta, a)$ can be computed in powers of β ; the high temperature expansion equivalent with **strong coupling expansion.**

$$\beta \ll 1 \longleftrightarrow g \gg 1$$

- Form of $G(\mathbf{p}, \beta, a)$ at small momentum transfer

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{n}} \exp(i\vec{q} \cdot \vec{r}a) \beta \langle \vec{s}_0 \cdot \vec{s}_r \rangle &= G(\mathbf{p}, \beta, a) \\ &= \frac{1}{c_0 + c_1 \mathbf{q}^2 a^2 + c_{2,ijkl} a^4 \sum q_i q_j q_k q_l + \dots} \\ &= c_0^{-1} - c_1 c_0^{-2} \mathbf{q}^2 a^2 + O(p^4) \end{aligned}$$

$$c_0^{-1} = \sum_{\mathbf{n}} \beta \langle \vec{s}_0 \cdot \vec{s}_{\mathbf{r}} \rangle$$

Susceptibility

$$c_1 c_0^{-2} = \sum_{\mathbf{n}} \mathbf{n}^2 \beta \langle \vec{s}_0 \cdot \vec{s}_{\mathbf{r}} \rangle$$

Second moment

$$G(\mathbf{p}, \beta, a) = \frac{c_1^{-1}}{c_0/c_1 + \mathbf{q}^2 a^2 + O(q^4)}$$



(mass gap $\times a$)²

Let us simply name $c_{\{0\}}/c_{\{1\}} = M$

Physical (mass gap)² is given by the limit,
 $\lim_{a \rightarrow 0} M/a^2$.

Butera and Comi (1997) computed susceptibility and second moment (and also others) up to

$\beta^{\{21\}}$ for all N .

We obtained M in β accordingly and its inverse series.

$$M = \frac{1}{\beta} - 4 + \frac{2(3 + 2N)}{2 + N} \beta + \frac{2(16 + 32N + 17N^2 + 2N^3)}{(2 + N)^2(4 + N)} \beta^3 - \frac{16(-1 + N)}{(2 + N)^2} \beta^4 + O(\beta^5).$$

$$\beta = x - 4x^2 + \frac{2(10N + 19)x^3}{N + 2} - \frac{8(14N + 25)x^4}{N + 2} + \frac{2(338N^3 + 2593N^2 + 6084N + 4512)x^5}{(N + 2)^2(N + 4)} + \dots \quad x = \frac{1}{M}$$

Large mass expansion of β is equivalent with the strong coupling expansion.

$a\Lambda_{\{L\}} \gg 1$ is assumed.

$\Lambda_{\{L\}}$ denotes the scale on the lattice (finite but not universal)

- In asymptotically free theories, the strongness of the bare coupling is equivalent with the largeness of lattice spacing.

Strong coupling expansion can be said as **the expansion around $a = \infty$**

- β expanded in $1/M$ describes the behavior of the bare coupling as functions of the lattice spacing a at $M \gg 1$.

- Can we recover the continuum asymptotically free behavior? This is the main theme. As a by product of the successful resolution of this problem, **the physical mass gap** would be approximately obtained.

3 デルタ展開

Mission (⋯ possible ⋯)

連続極限 $a \rightarrow 0$ の近似を強結合展開級数において実行する

$a \rightarrow 0$ は $M \rightarrow 0$ と同等 (いつもとは限らないだろうが)

2次元

$$\beta \sim \beta_c - \frac{1}{4} M^{1/(2\nu)} + \dots, \quad \beta_c = \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2}), \quad \nu = 1, \quad (N = 1)$$

$$\beta \sim -\frac{N-2}{2\pi N} \log(MC_\xi^2) + \frac{1}{2\pi N} \log \left\{ \frac{-1}{2} \log(MC_\xi^2) \right\} + \dots \quad (N \geq 3)$$

$$C_\xi = 32^{-1/2} \left(\frac{e^{1-\pi/2}}{8} \right)^{\frac{1}{N-2}} \Gamma \left(1 + \frac{1}{N-2} \right).$$

*Hasenfratz et. al.
1990*

β は M の関数; $\beta = \beta(M)$.

-> 2変数関数に拡張; $\beta = \beta(M(1-\delta))$, $0 \leq \delta \leq 1$

New β は $1/(1-\delta)$ という比率でもとの関数を横方向に伸ばしたものの

$\delta=0$ とすると元の関数と一致

$\delta=1$ とすると $\beta(0)$ と一致

$\beta = \beta(M(1-\delta))$ の強結合展開とは $1/M$ 展開と同義
2変数拡張版: $\beta(M(1-\delta))$ を $1/M=x$ と δ に関して
マクローリン展開する

簡単な例でどうなるか?

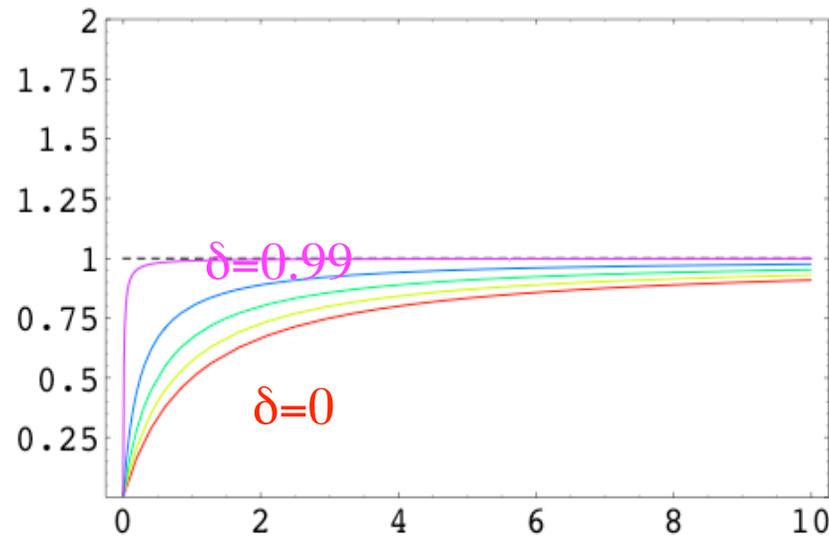
-> 次のスライド

デルタ展開の直感的説明

例1 $F(M)=1/(1+M)=x/(x+1)$, $x=1/M$

$F(M(1-\delta))=1/(1+M(1-\delta))=x/(x+1-\delta)$ in closed form

δ に0, 0.25, 0.5, 0.75, 0.99と数値を入れてみると



当然ではあるが、本来のFの $x \gg 1$ における振る舞いが、 $\delta \sim 1$ では、 $x \sim (<)1$ でも見える。

$x \ll 1$ で有効な級数が $\delta \sim 1$ でも同様な領域で有効な級数でありえるならば、 $x \gg 1$ における振る舞いをなんらかのデルタ展開後の x のべき級数でとらえることができるだろう

デルタ展開の特性--スケールリング領域の拡大

例1 (続) $F(M)=1/(1+M)=x/(x+1)=x-x^2+x^3-\dots$

Expansion of $F(M(1-\delta))=x/(x+1-\delta)$ in x ($M \gg 1$)

We need truncation order in x . Let $F_{\{n\}}=x-x^2+x^3-\dots+(-1)^{(n-1)}x^n$.

Then

$$x \rightarrow x/(1-\delta) \sim x(1+\delta+\delta^2+\dots+\delta^{(n-1)})$$

n次

x と δ のトータルな次数がn次までで

$\delta=1$ とおく

(引き延ばし率無限大)

結果は

$$x \rightarrow x \times n, x^2 \rightarrow x^2 \times n(n-1)/2, \dots$$

δ の展開を止めて
おけば $\delta=1$ としても有限。
 n はcut-offの役割。

一般には2項係数

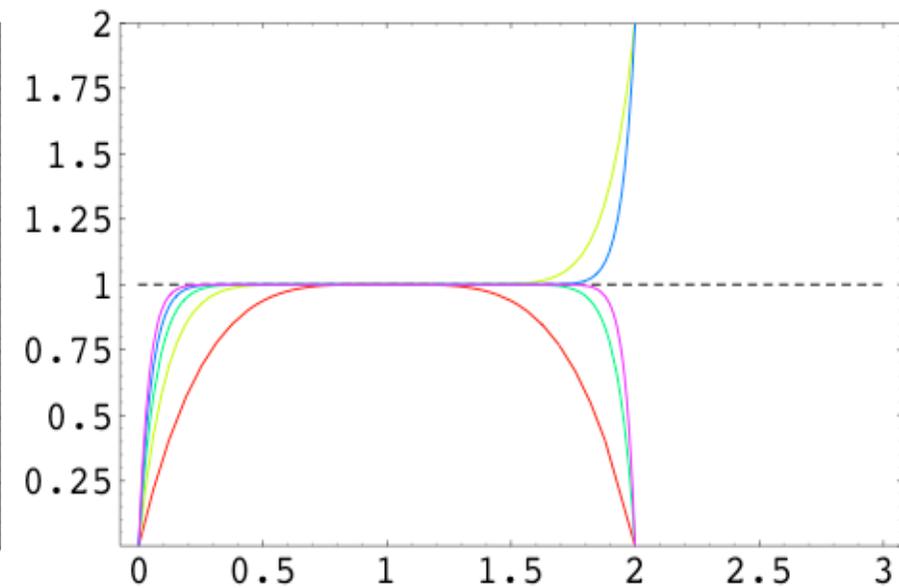
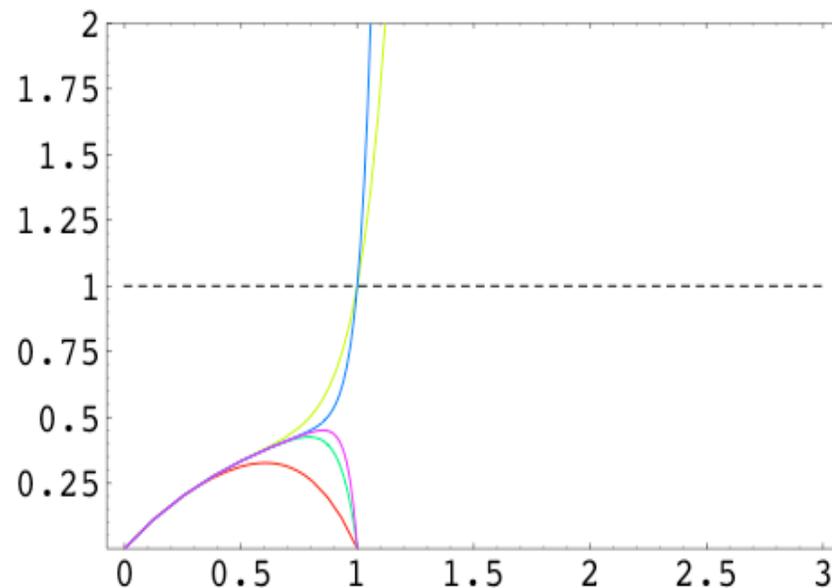
$$C(n, r) = n! / \{r!(n-r)!\}$$

がかかる

$$x^r \rightarrow C(n, r) x^r$$

$$F_{\{n\}} = x - x^2 + x^3 - \dots + (-1)^{(n-1)} x^n.$$

$$\rightarrow C(n, 1)x - C(n, 2)x^2 + C(n, 3)x^3 + \dots + C(n, n)(-1)^{(n-1)}x^n$$



4次、9次、14次、19次、24次

$$C(n, 1) x - C(n, 2) x^2 + C(n, 3) x^3 + \dots + (-1)^{(n-1)} C(n, n) x^n \\ = 1 - (1-x)^n$$

各係数は $n \rightarrow \infty$ で発散、しかし、全体では
 $|1-x| < 1$ で正しい結果 $F(M=0)$ に収束！

一般に、 $\lim_{M \rightarrow 0} F(M) = F(0)$ が存在するならば
 $\lim_{\text{order } n \rightarrow \infty} F_{\{\delta\}}(1/x) = F(0)$
がある x の有限領域で成立するだろう。($x \rightarrow \infty$ は
必要ない！)

例2 $F(M)=\log(1+1/M)$
 $= \log(1+x)=x - x^2/2 + x^3/3 - \dots$

この例では $F(M) \rightarrow \log(1/M)$
 $= \log(x) \rightarrow \text{infinity}$

この対数的振る舞い $\sim \log(x)$ が x のべき級数から
近似的に出せるか？

$$x - x^2/2 + x^3/3 - \dots \rightarrow C(n, 1)x - C(n, 2)x^2/2 \\ + C(n, 3)x^3/3 - \dots + (-1)^{(n-1)}C(n, n)x^n/n$$

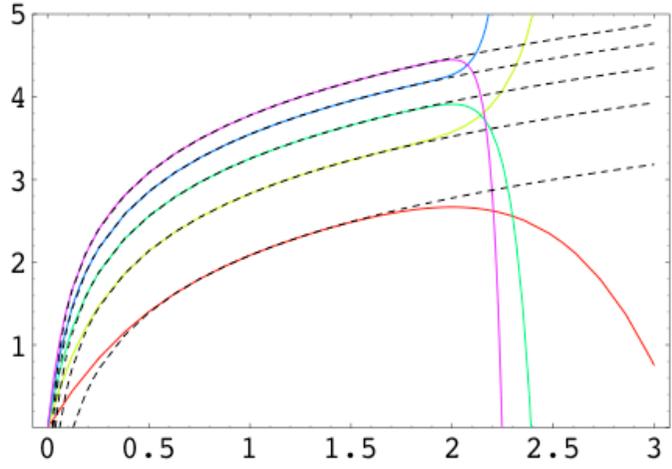
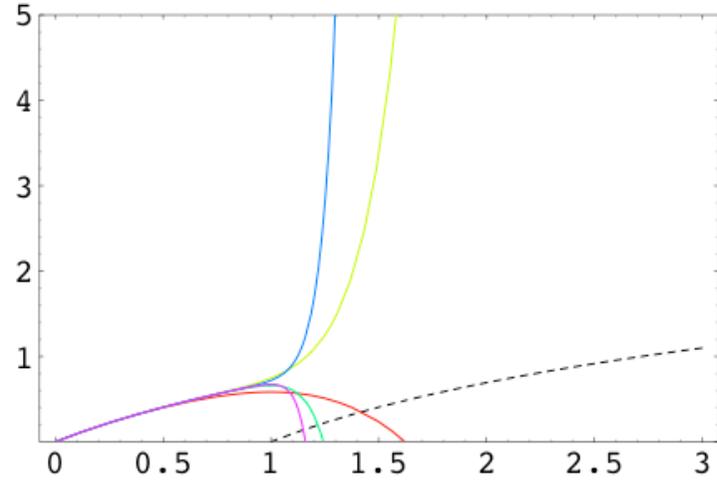
注意: $\log(x) \rightarrow \text{infinity}$ のように、発散する場
合はデルタ展開の影響がこの漸近項にも出る。

$M \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \text{infinity}$)でconst.に収束する場合は、この項はデルタ展開の影響を受けない(高次の項は影響を受ける;後述)。しかし、一般には以下のようなになる。

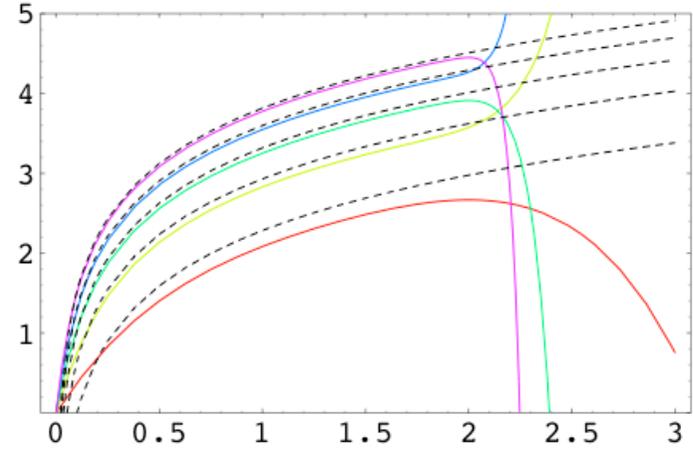
例: $\log x$

$$\begin{aligned}\log x &\rightarrow \log x/(1-\delta) = \log x - \log(1-\delta) \\ &= \log x + \delta + \delta^2/2 + \delta^3/3 + \dots + \delta^n/n \\ &= \log x + 1 + 1/2 + 1/3 + \dots + 1/n\end{aligned}$$

δ の展開を δ のどの次数まで(n 次?、 $n+1$ 次?、その他?)やったらいいのか、はっきりとしない。



n次 better!



n+1次

デルタ展開のまとめ

$$x^r \rightarrow C(n, r) x^r$$

なる規則で定まる一種の変換（オーダー依存型）

- $C(n, r) = \Gamma(n+1) / \{ \Gamma(r+1) \Gamma(n-r+1) \}$

として、 $n \rightarrow \alpha$ としてやれば一般のべきでも定まる。さらに、 α を微小として x^α を展開すると

$$x^\alpha = 1 + \alpha \log x + O(\alpha^2)$$

$$\rightarrow 1 + \alpha \left(\log x + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \right) + O(\alpha^2)$$

のように単純な対数項の変換が決まる。

しかし、 $\log(\log x)$ や $\log(\log x)/\log x$ はこうはいかないだろう。

- $C(n, r) = \Gamma(n+1) / \{ \Gamma(r+1) \Gamma(n-r+1) \}$

で r が 0 または負の整数値をとる場合:

$$C(n, 0)=1, C(n, -1)=1, C(n, -2)=1, C(n, -3)=1, \dots$$

つまり、ガンマ関数の解析接続によって以下の結果を得る。

$$M^{(-r)} (= x^r) \rightarrow 0 \quad (r = -1, -2, -3, \dots)$$

Mの正べきは消える!

これは $\{M(1-\delta)\}^k = M^k(1-k\delta + k(k-1)/2\delta^2 + \dots + \delta^k)$ と展開してみればわかる当然の結果。

- Mのregularな有限級数は十分な高次では消失する。

→ 連続極限(2次転移近傍含む)への接近はデルタ展開で加速される。Acceleration!

4 逆ラプラス変換

Mに関する逆ラプラス変換(〜ボレル変換)で連続極限の近似。

デルタ展開と関係があるが、詳細は略 (2009)。

$$\bar{Q}(t) = \int_{M-i\infty}^{M+i\infty} \frac{dz}{2\pi i} \frac{\exp(tz)}{z} \underline{Q(z)} := L^{-1}[Q].$$

original

$$Q(z) = z \int_0^{\infty} dt \exp(-tz) \bar{Q}(t) := L[\bar{Q}].$$

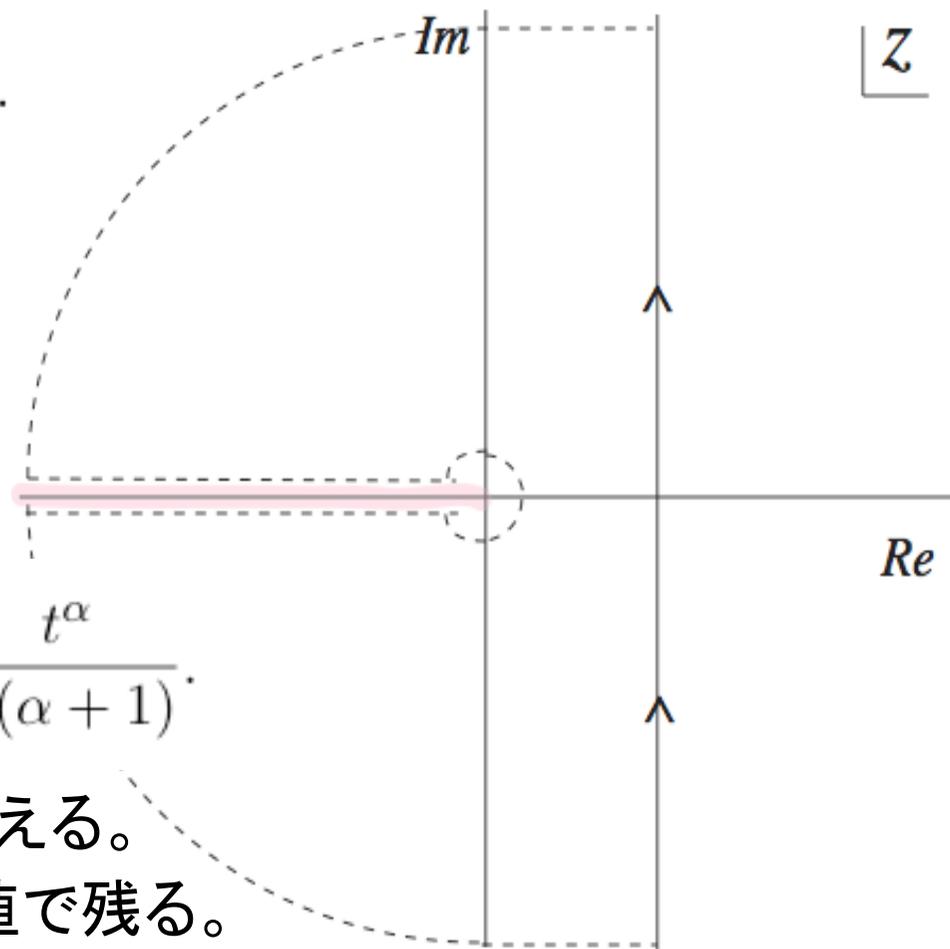
$\bar{Q}(t)$ には $Q(M)$ の特徴が含まれている。

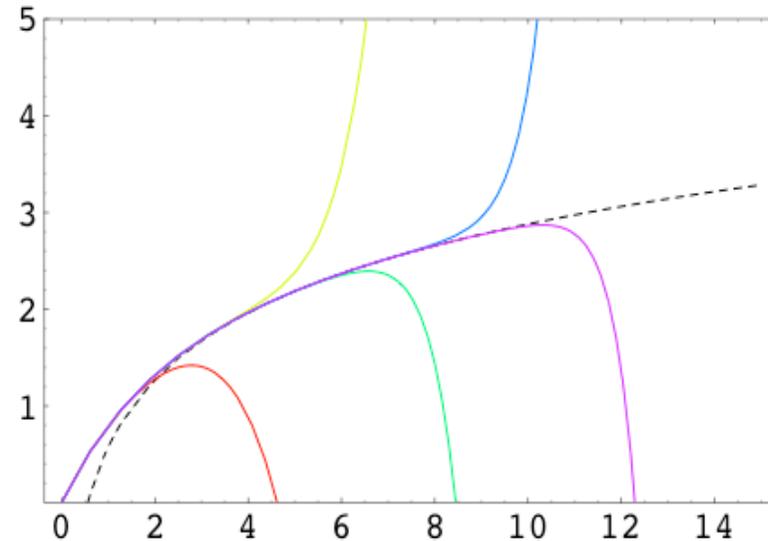
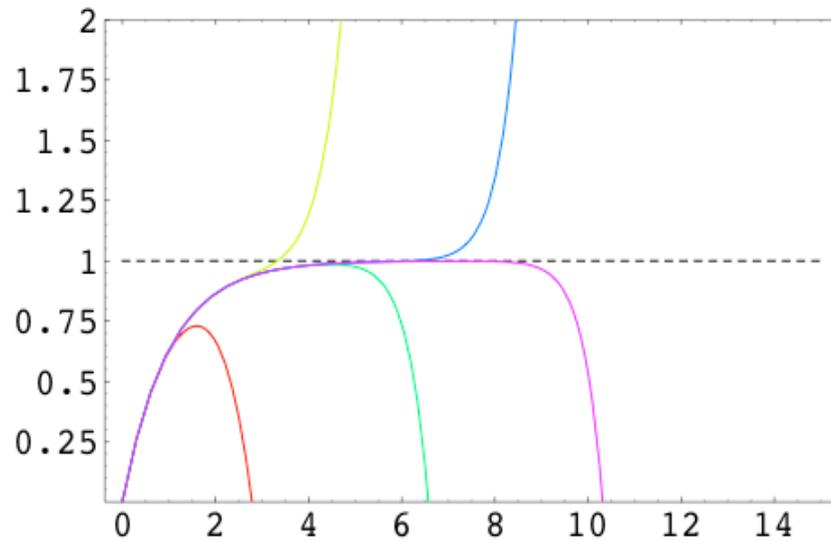
$$\int_{M-i\infty}^{M+i\infty} \frac{dz}{2\pi i} \frac{\exp(tz)}{z} \frac{1}{z^r} = \frac{t^r}{r!}$$

1/Mの級数の収束半径は無限大(元の収束半径が有限ならば)

$$\int_{M-i\infty}^{M+i\infty} \frac{dz}{2\pi i} \frac{\exp(tz)}{z} \frac{1}{z^\alpha} = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}$$

Mの正の整数ベキは消える。
 それ以外のベキは同じ値で残る。
 物理模型への応用では α は臨界指数に相当





- $x/(1+x) = x - x^2 + x^3 - \dots + (-1)^{(n-1)} x^n + \dots$
 $\rightarrow t - t^2/2! + t^3/3! - \dots + (-1)^{(n-1)} t^n/n! + \dots$
 - $\log(1+x) = x - x^2/2 + x^3/3 - \dots$
 $\rightarrow t - t^2/(2!2) + t^3/(3!3) - \dots + (-1)^{(n-1)} t^n/(n!n) + \dots$
- $x \gg 1$ では $\log(1+x) \sim \log(x)$
 $\rightarrow \log(t) + \gamma$

5 応用

5-1 デルタ展開

- 非線形シグマで $N \rightarrow \infty$ では、なんとかなるが、収束は遅い。早めるには、例えば、[Symanzik\(1983\)](#)の修正作用が効果有り。(2007)
- イジングでは、普通の高温展開を改良できるが、定量的な近似は失敗 (2007)
- [Symanzik](#)は他のケース、たとえば、成分数 N が有限($N=3, 4, 5, \dots$)でも有効だろうが、強結合展開が複雑になりすぎるだろう。

→ 他の手だては…、最近思いついたトリック…

困難の元凶は、格子ファントム (lattice artifacts)

..... だからSymanzikが有効だった.....

lattice artifactsを減ずるトリック

= もとの量にその微分をパラメータを引っ掛けて引き算する

- 非線形シグマで $N \rightarrow \text{infinity}$:

Lattice artifacts は $x^{(-i)} \times \log(x)$ の形であるが、たとえば leading の $i=1$ のとき、 $\text{const} \times \log(x)/x$ は const の値がなんであれ、

$$(\text{const} \times \log(x)/x) + x(d/dx) (\text{const} \times \log(x)/x)$$

$$= \text{const} \times 1/x$$

となり、これは、デルタ展開で消える！

実際、Symanzikを適用した場合と同程度に近似精度改善。

- 3次元イジングでは、まあまあうまくいった。以下3DIsing (2次元でも同様、というかややより良好な結果) (2012)

$$\xi \rightarrow f_+(1 - \beta/\beta_c)^{-\nu} \{1 + \text{const} \times (1 - \beta/\beta_c)^\theta + \dots\}, \quad \beta < \beta_c,$$

$$\beta_c = 0.22165, \quad \nu = 0.630,$$

$$\beta = \beta_c - \beta_c f_+^{1/\nu} \underline{M}^{\frac{1}{2\nu}} + \dots,$$

← $\xi^{-2} \sim M + O(M^2), \quad (M \sim 0)$
 Too many refs to list up!
 Sorry for the omission.

前提: 下の形、 β_c, ν は未知とする

$$\beta = \beta_c - \underline{A_1 x^{-p_1}} - A_2 x^{-p_2} - A_3 x^{-p_3} - O(x^{-p_4}), \quad x = M^{-1},$$

$$\beta_c = \lim_{M \rightarrow 0} \beta(M),$$

これらの項が臨界温度への接近を邪魔する。

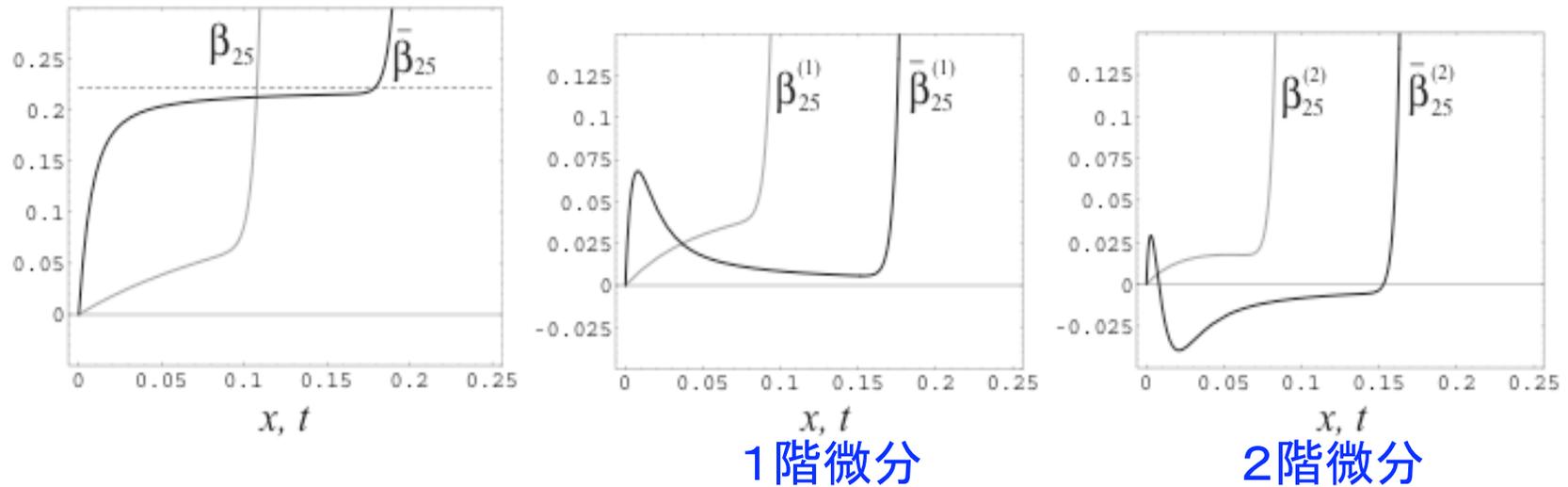


Figure 1: Plots of β_{25} , $\bar{\beta}_{25}$, $\beta_{25}^{(1)}$, $\bar{\beta}_{25}^{(1)}$, $\beta_{25}^{(2)}$ and $\bar{\beta}_{25}^{(2)}$. $\beta_{25}^{(k)}$ is shown in the gray plot and its delta expanded version $\bar{\beta}_{25}^{(k)}$ in the black plot. In the first plot, the dotted line indicates the critical temperature $\beta_c = 0.22165 \dots$ which value is widely confirmed. In $\bar{\beta}_{25}$, the high temperature region is pushed away to the neighbourhood of the origin $t = 0$ and the scaling region appears to cover up to point $t \sim 0.15$. In the second plot, we see, though $\beta_{25}^{(1)}$ is monotonic, $\bar{\beta}_{25}^{(1)}$ has a peak around $t \sim 0.01$. This peak indicates the turning point from high temperature region to the scaling region. The same reasoning applies to $\bar{\beta}_{25}^{(2)}$ in the third plot.

補正項が $\beta_{\{c\}}$ への漸近を邪魔しているが、デルタ展開だけで結構いい線いっている。改善は明瞭ではあるが、臨界量の見積もりの精度を上げるために、2ページ前の工夫をほどこす。

$\rho x(d/dx)\beta$ を β に加えて、 ρ の適切な値を探すことにより $\beta_{\{c\}}$ を求める。

$$x \frac{d}{dx} \beta = p_1 A_1 x^{-p_1} + p_2 A_2 x^{-p_2} + \dots$$

$$\beta + \rho x \frac{d}{dx} \beta = \beta_c - (1 - \rho p_1) A_1 x^{-p_1} - (1 - \rho p_2) A_2 x^{-p_2} + \dots$$

$\rho \sim 1/p_{\{1\}}$ とできるのならば、第一補正項はほぼ消えて、 $\beta_{\{c\}}$ が見積もりやすくなる。

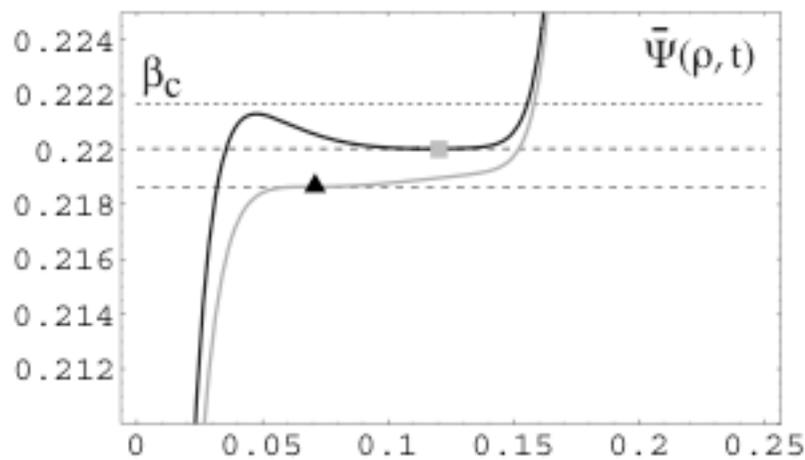
How to estimate ρ : 以下を思い出そう

一般に、 $\lim_{\{M \rightarrow 0\}} F(M) = F(0)$ が存在するならば

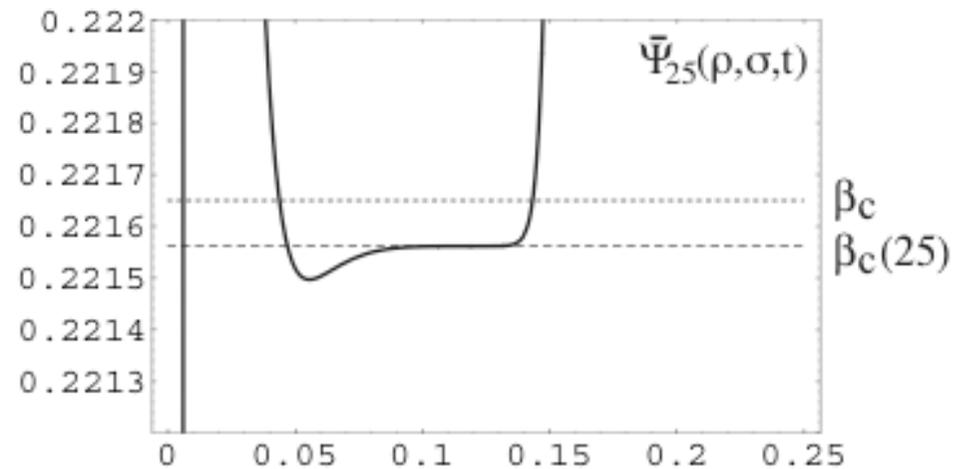
$\lim_{\{\text{order } n \rightarrow \text{infinity}\}} F_{\{\text{delta}\}}(1/x) = F(0)$

がある x の有限領域で成立するだろう。 $(x \rightarrow \text{infinity}$ は必要ない！)

$F_{\{\delta\}}(1/x)$ は収束領域内の x でほとんど一定値関数
 ——>高階微分までゼロまたは極めて小さくなる。この状
 況がもっとも強く現れるような ρ の値を探す。
 さらに、より近似精度を上げるために、 β の2階微分、3階
 微分、なども取り入れて、パラメータも σ, τ, \dots と応じて増
 やして同じことを繰り返す。うまくいけば、 $\beta_{\{c\}}$ とともに
 、 $\rho \sim 1/p_{\{1\}}$ が十分に実現され、 $p_{\{1\}}$ も見積もれるだ
 ろう。

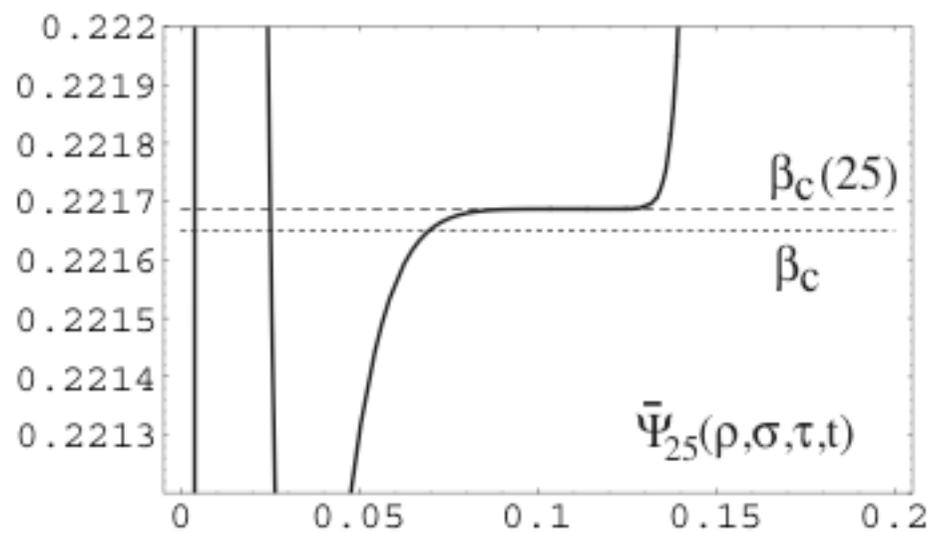


1-parameter



2-parameters

3-parameters



1-parameter

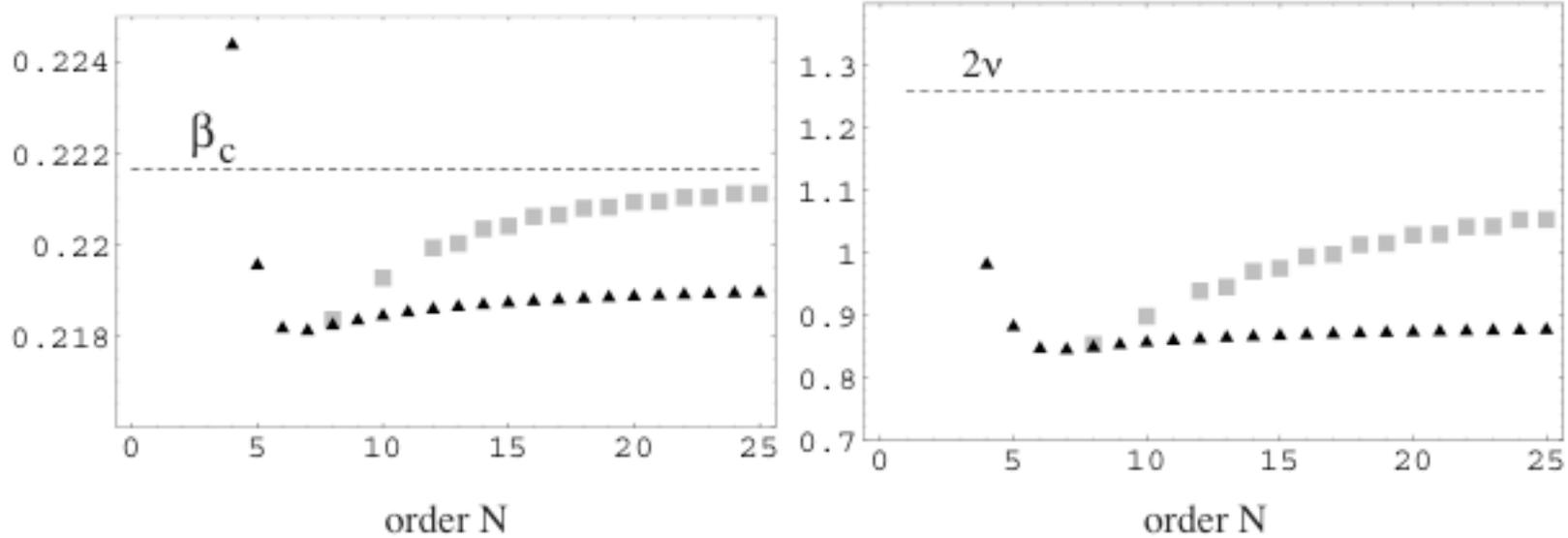


Table 1: Estimation of β_c and $p_1 = 1/(2\nu) = 0.79365$ ($1/p_1 \sim 1.26$) with one parameter.

<i>order</i>	20	21	22	23	24	25
β_c	0.220933	0.220944	0.221035	0.221040	0.221114	0.221117
$1/p_1$	1.028607	1.029841	1.041745	1.042425	1.053098	1.053408
t^*	0.133502	0.126393	0.135082	0.128043	0.136505	0.129586

Table 2: Estimation of β_c , p_1 and p_2 with two parameters.

<i>order</i>	20	21	22	23	24	25
β_c	0.221442	0.22140	0.221505	0.221513	0.221553	0.221562
$1/p_1$	1.138882	1.127291	1.160289	1.163069	1.179823	1.183677
$1/p_2$	0.433345	0.413636	0.468705	0.472926	0.500057	0.505965
t^*	0.116906	0.096589	0.119071	0.114190	0.120643	0.116991

Table 3: Estimation of β_c and p_1 and p_2 with three parameters.

<i>order</i>	23	24	25
β_c	0.222079	0.221741	0.221687
$1/p_1$	2.010008	1.336976	1.274452
$1/p_2$	0.920863	0.715954	0.648486
$1/p_3$	0.299087	0.242590	0.210993
t^*	0.111805	0.111116	0.112973

5-2 逆ラプラス変換

- lattice artifactsが主原因と思われるが、収束半径の改善だけでは連続極限の近似には力不足 (少なくとも21次の結果まで)。そこで、**パデ近似法**を併用して、 N が有限な普通の値で非線形シグマでテスト: 結果は良好ではあった (2011)

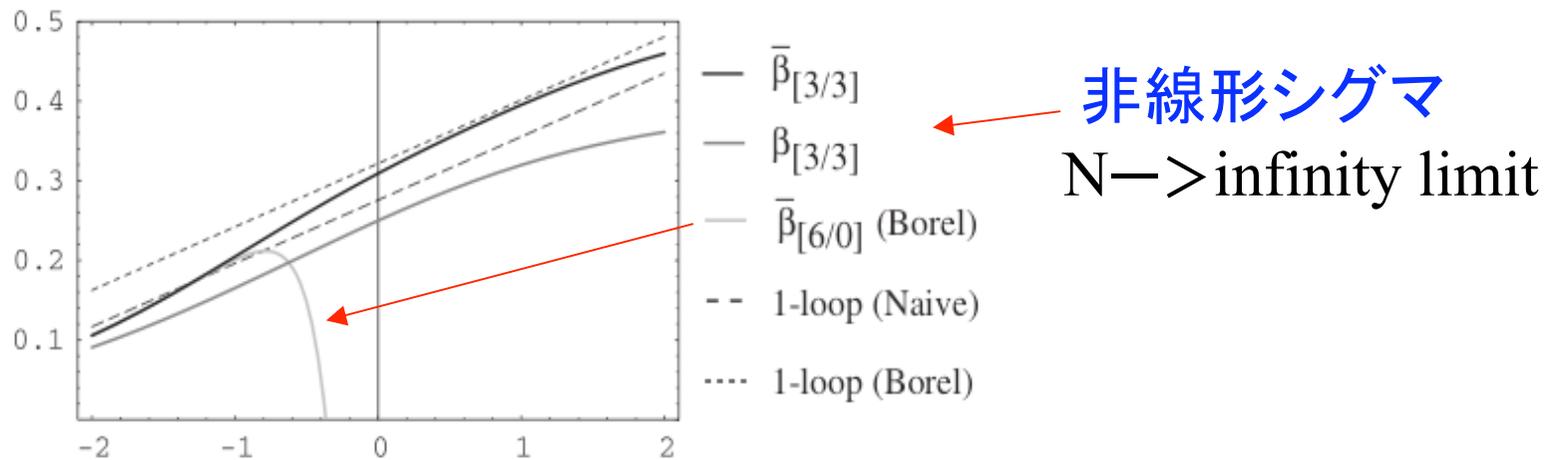
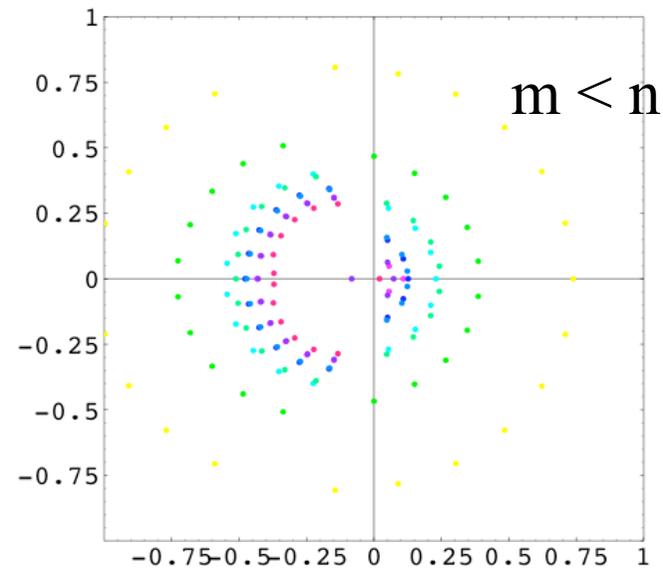
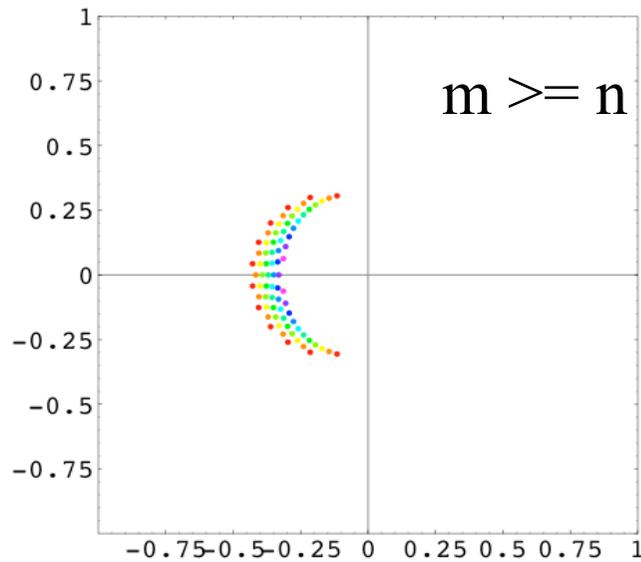
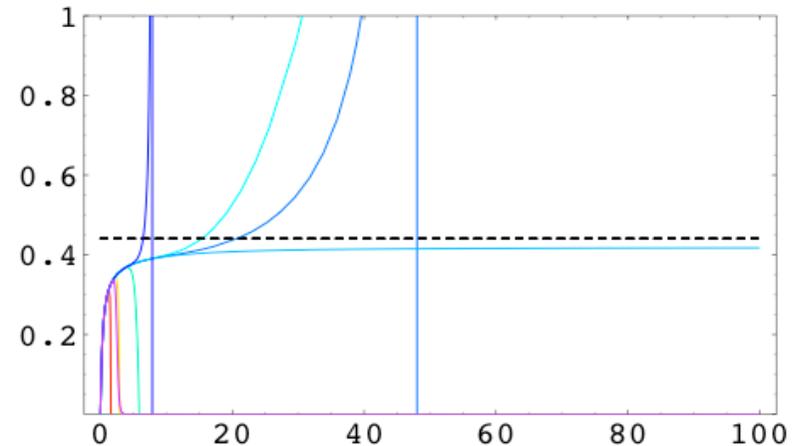
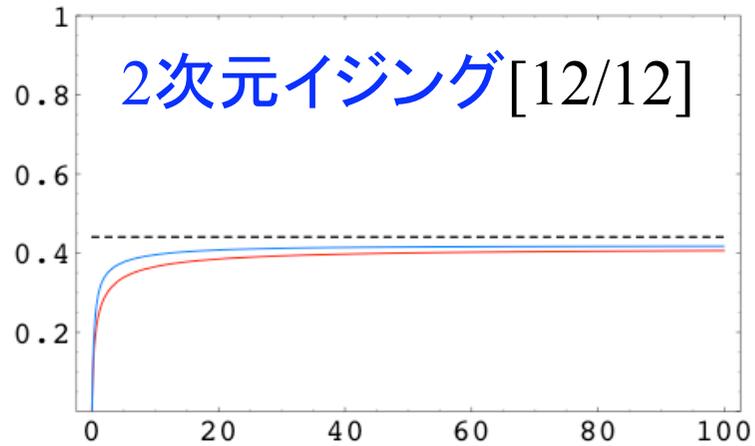


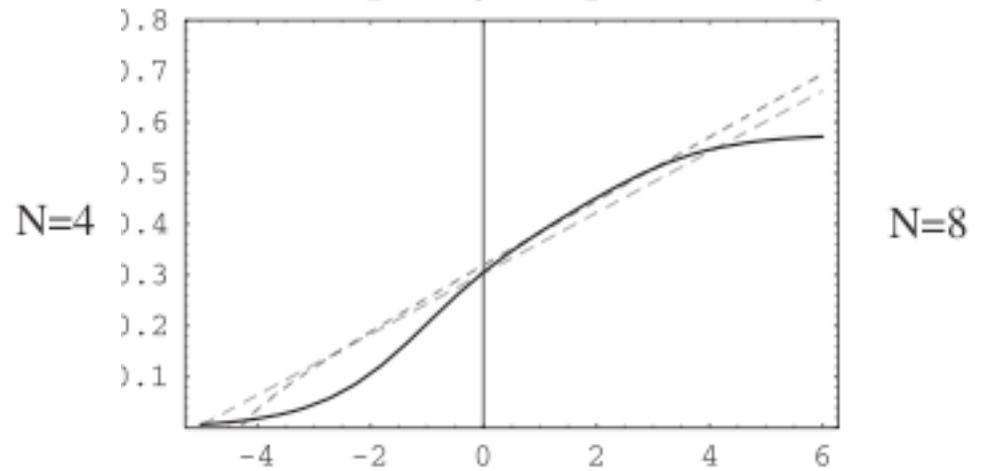
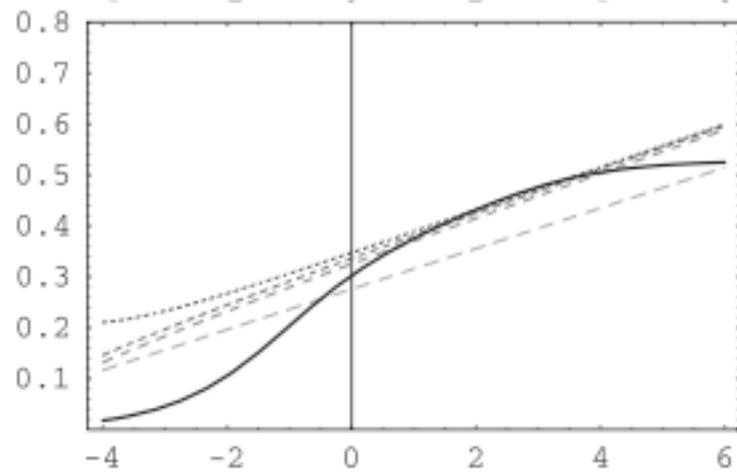
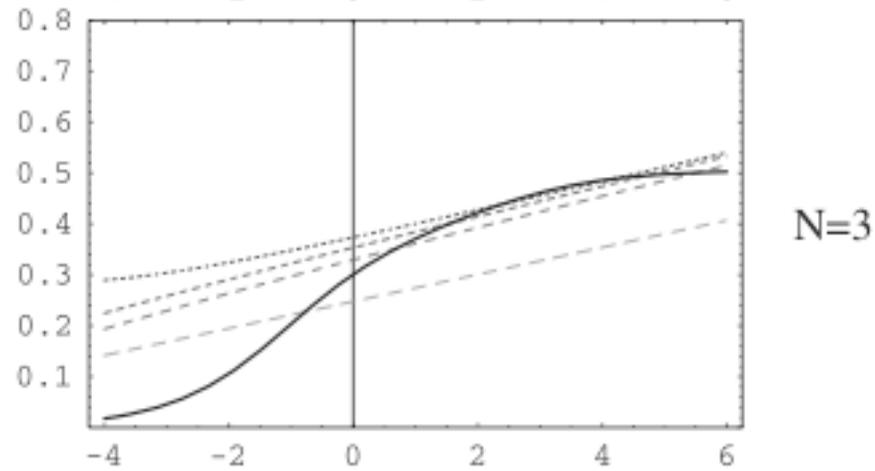
FIG. 1. Plot of improved β and $\bar{\beta}$ at sixth order. Two dashed lines (one for β and the other for $\bar{\beta}$) represent behaviors at continuum. The horizontal axis corresponds to $\log \bar{x} = \log(1/\bar{M})$ and $\log x = \log(1/M)$ (for the Padé-only case).

パデ近似 = 有理関数での近似

L次のマクローリン級数 → 分子m次、分母n次の多項式 [m/n]



非線形シグマ



- いずれも対角型で[9/9]。

TABLE II. Result of estimation of the constant C_ξ (implied by C_{app}). The last column shows the result of Botera and Comi [10].

N	$C_{\text{app}}^{2\text{-loop}}$	$C_{\text{app}}^{3\text{-loop}}$	$C_{\text{app}}^{4\text{-loop}}$	C_ξ	C_{BC}
3	0.0068	0.0094	0.0112	0.0125	
4	0.0336	0.0373	0.0398	0.0416	0.039
5	0.0584	0.0615	0.0639	0.0652	0.065
6	0.0771	0.0797	0.0818	0.0826	0.084
7	0.0913	0.0934	0.0953	0.0955	
8	0.1021	0.1038	0.1055	0.1054	0.106
9	0.1106	0.1121	0.1136	0.1132	
10	0.1175	0.1187	0.1201	0.1195	0.121
11	0.1231	0.1242	0.1255	0.1247	
12	0.1278	0.1288	0.1299	0.1290	0.130
13	0.1318	0.1326	0.1337	0.1327	
14	0.1352	0.1359	0.1369	0.1358	0.137
15	0.1381	0.1388	0.1397	0.1386	

- 残念なのは、 N の値が小さめのとき、asymptotic free な振る舞いが明瞭に見えていないこと。この振る舞いの確認は、定数 C_{ξ} の近似計算よりも、ある意味重要な点である。

6 課題など

6-1 その他コメント

- $C_{\{\xi\}}$ は解析解が得られているが、 χ (susceptibility) に対する同様な定数 $C_{\{\chi\}}$ は解析解は得られていない。この $C_{\{\chi\}}$ に対しても、同じ近似計算を試みた。既存のモンテカルロ計算の結果におおかた一致した。また、理論的な手法を使ったものには [Butera and Comi \(1997\)](#) の結果があるが、それとも一致。ただし、やはり、 $N=3,4$ の場合には、予想される χ の振る舞いを良く再現できていない。数値精度も今ひとつである。
- 強結合展開は、より高次の結果が特に $N=3,4$ では必要。決してマニアックな研究ではなく、より高次の項がわかれば、よりはっきりとこういった試みの有効性(あるいは限界)が見えてくる。より高次の計算は重要！！

6-2 課題

- 導関数を引き算してlattice artifactsを減ずる方法を、 N が有限な値、特に $N=3,4$ に対して適用して、漸近的自由性を強結合展開からであることを明瞭に示すこと。このとき、Padeなしで、逆ラプラス変換だけで示せたら結構なこと。
- フェルミオンにたいする応用：
素朴なWilsonフェルミオン(Gross-Neveuで)だけにしか適用していないが、結果はなんだかあいまい。連続極限への接近も遅めである。やはり、カイラル対称性を陽に破っていることで、紫外発散が出るのが原因のような気がする。
最近の格子上のフェルミオンの扱いの進展を取り入れる必要がある。

- 有限温度や有限密度への拡張:

温度方向と空間方向との格子定数を別に扱えばよいわけであるが、面白そうだと感じているがまだ手つかず。

- 2次発散がある場合:

$M = (\text{mass gap} \times a)^2$ の
 mass gap^2 には2次発散 a^{-2}
 が含まれるだろう。このとき、
 $M \rightarrow \text{non-zero}$ ($a \rightarrow 0$ で)

$$G(\mathbf{p}, \beta, a) = \frac{c_1^{-1}}{\underline{c_0/c_1} + \mathbf{q}^2 a^2 + O(q^4)}$$

↑
 $(\text{mass gap} \times a)^2$

となり、ここでの方法はこのままでは
 使えないだろう。

- ゲージ場:ここで述べたアプローチが適用は出来る。たとえば、Wilson loopを考えて、その「運動量表示」のようなものも構成でき、弦定数と M , そして結合定数 $g(M)$ の関連もつく。しかし、少なくともlattice artifactsを減ずることが出来ないと定量的な結果は出せないだろう。強結合展開の次数ももっと高次まで！！