

# 非線形量子電気力学に基づく真空の 性質とそのX線偏光観測への応用

矢田部 彰宏 (早稲田大学)

共同研究者 山田 章一 (早稲田大学)

Ref

- Akihiro Yatabe, Shoichi Yamada, *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, 2018 (2018) 033B04. arXiv:1801.05430
- Akihiro Yatabe, Shoichi Yamada, *The Astrophysical Journal*, 850 (2017) 185. arXiv:1712.03960

# 目次

## 1. 非線形量子電気力学に基づく真空の性質

イントロダクション (レーザー実験による検証とProper-time method)  
相互作用描像に基づくProper-time methodの摂動論  
平面電磁波の長波長極限、crossed field中での屈折率の評価  
平面電磁波の変化を考慮した外場での屈折率の評価

Heaviside-Lorentz単位系、 $c = \hbar = 1$

## 2. 非線形量子電気力学に基づくX線偏光観測

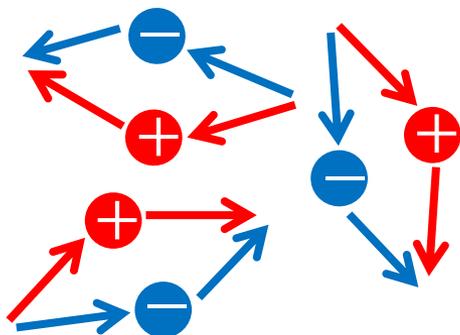
イントロダクション (中性子星からの放射の偏光)  
中性子星周囲の磁気圏における偏光の発展  
非線形QEDとプラズマの誘電性による偏光モードの変換

# 非線形量子電気力学（非線形QED）

強い電磁場のもとでの電子と光子の振る舞いを扱う物理学

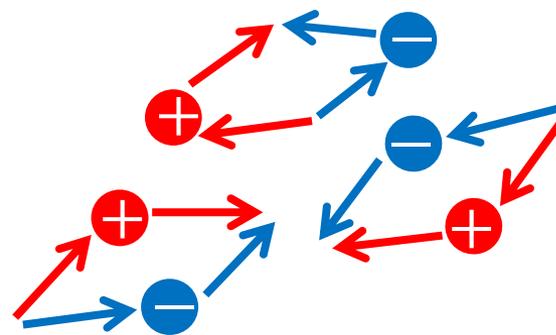
W. Heisenberg, H. Euler Z. Phys. 98 (1936) 714  
J. Schwinger, Phys. Rev. 82 (1951) 664

量子論での真空



粒子（電子陽電子対）が生成と消滅を繰り返す

強い磁場のもとでは



“軌道”の向きがそろい、結果的に屈折率が変化

J. S. Toll, PhD Thesis (1952)  
S. L. Adler, Ann. Phys. 67 (1971) 599  
K. Hattori, K. Itakura, Ann. Phys. 330 (2013) 23

# 実験による非線形QEDの検証

非線形QEDが重要になるのは、例えば磁場の場合は

$$B_c = \frac{m_e^2 c^3}{e\hbar} = 4.4 \times 10^{13} \text{ G} \quad \text{Critical fieldと呼ばれる}$$

程度か、それ以上の磁場である。

レーザー強度の  
世界記録

対応する磁場

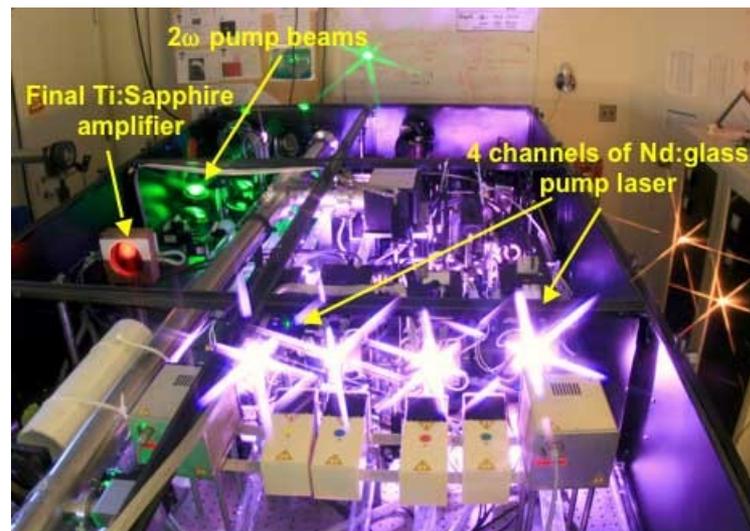
$$2 \times 10^{22} \text{ W/cm}^2 \quad 10^{10} \text{ G}$$

Yanovsky et al., Optics Express,  
16 (2008) 2109

非線形QEDは実験によって  
検証されていない。

Zavattini et al., PRL 96 (2006) 110406  
Zavattini et al., PRL 99 (2007) 129901

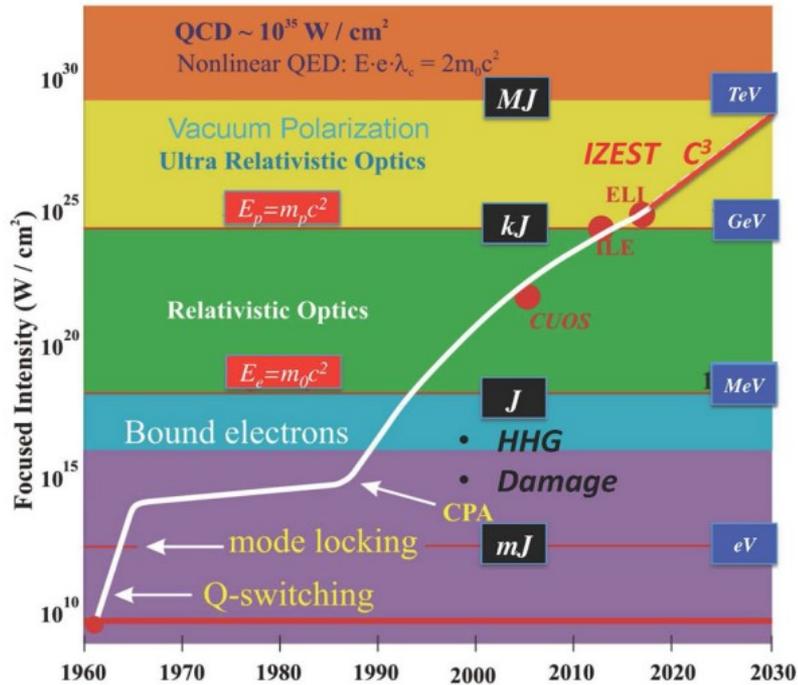
HERCULES laser (ミシガン大学)



<http://cuos.engin.umich.edu/researchgroups/hfs/facilities/hercules-petawatt-laser/>

# レーザー実験の進歩

## 高強度化

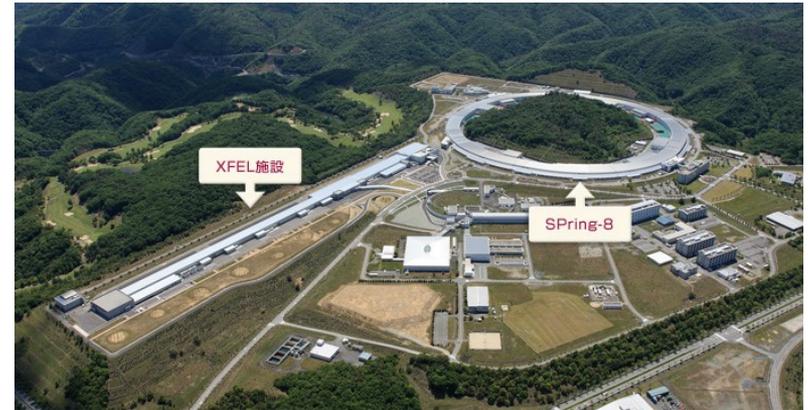


Mourou, Tajima (2012)

## 次世代レーザー強度

$$10^{24-25} \text{ W/cm}^2$$

## X線レーザー

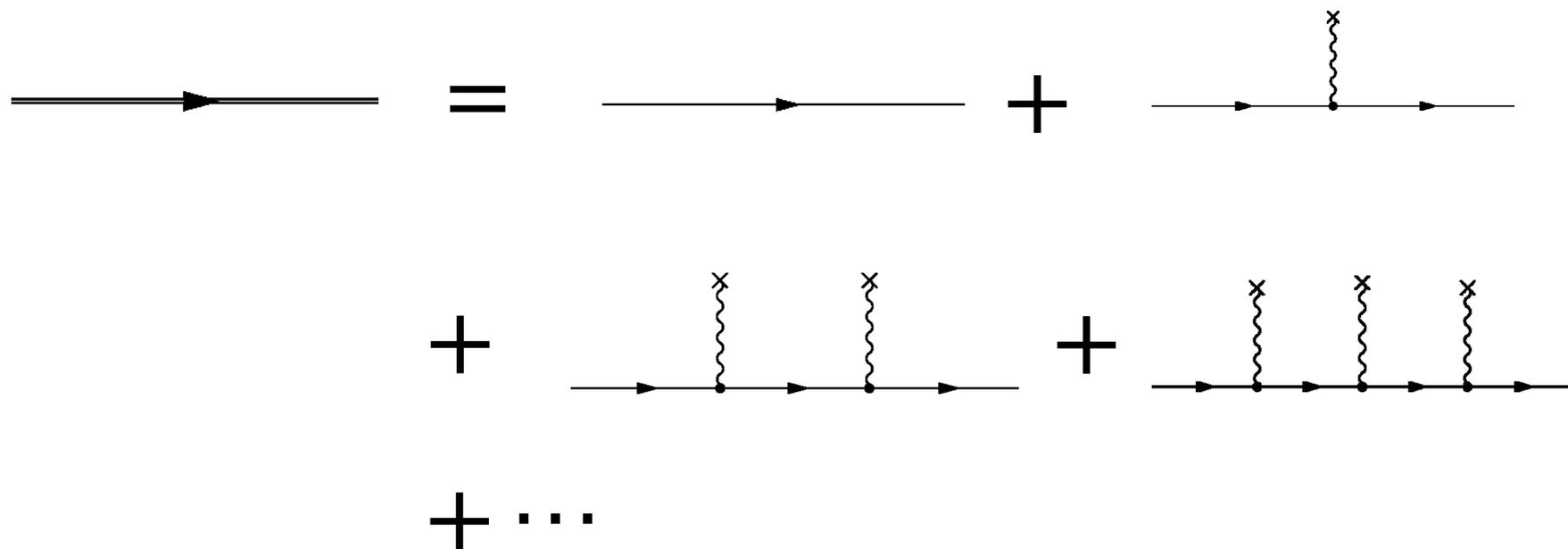


<http://xfel.riken.jp/xfel/>

## 最大20keVのX線

# 非線形QEDの問題の解き方

非線形QEDの効果を検討するためには電磁場の影響をすべて取り入れる必要がある。



電子のプロパゲータに関して電磁場を摂動的に取り扱うことができない。

# SchwingerのProper-time method

J. Schwinger, Phys. Rev. 82 (1951) 664

W. Dittrich, H. Gies (2000), *Probing the Quantum Vacuum* (Springer)

電磁場中の電子のプロパゲータが満たす式

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu(x) - m) G(x, y) = \delta^4(x - y)$$

この式を演算子に関する方程式を座標空間において表したものとみなし、

$$G(x, y) = \langle x | \hat{G} | y \rangle$$

演算子に関する方程式を書く。

$$\left( \gamma^\mu \hat{\Pi}_\mu - m\mathbf{1} \right) \hat{G} = \mathbf{1}$$

ただし、 $\hat{\Pi}_\mu = \hat{p}_\mu - eA_\mu$  で  $\mathbf{1}$  は演算子であることを強調したものである。

# SchwingerのProper-time method

演算子で表したプロパゲータの演算子の満たす方程式

$$\left( \gamma^\mu \hat{\Pi}_\mu - m \mathbf{1} \right) \hat{G} = \mathbf{1}$$

この方程式を形式的に解くと、

$$\hat{G} = \frac{1}{\gamma^\mu \hat{\Pi}_\mu - m} = - \frac{\gamma^\mu \hat{\Pi}_\mu + m}{m^2 - (\gamma^\mu \hat{\Pi})^2}$$

となり、さらに積分で表す。

$$\hat{G} = (-\gamma^\mu \hat{\Pi}_\mu - m) \times i \int_0^\infty ds \exp \left[ -i \left( m^2 - (\gamma^\mu \hat{\Pi}_\mu)^2 - i\varepsilon \right) s \right]$$

# SchwingerのProper-time method

$$\hat{G} = (-\gamma^\mu \hat{\Pi}_\mu - m) \times i \int_0^\infty ds \exp \left[ -i \left( m^2 - (\gamma^\mu \hat{\Pi}_\mu)^2 - i\varepsilon \right) s \right]$$

積分を実行すると分母の部分が現れることがわかる。 $\varepsilon$ は積分を収束させるためのもので、積分の後にゼロとする。

このとき、座標空間におけるプロパゲータは、

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \langle x | \hat{G} | y \rangle \\ &= i \int_0^\infty ds e^{-im^2 s} \left[ \langle x | -\gamma^\mu \hat{\Pi}_\mu \exp \left[ -i \left( -(\gamma^\mu \hat{\Pi}_\mu)^2 \right) s \right] | y \rangle \right. \\ &\quad \left. + \langle x | -m \exp \left[ -i \left( -(\gamma^\mu \hat{\Pi}_\mu)^2 \right) s \right] | y \rangle \right] \end{aligned}$$

$\varepsilon$ は省略<sub>9793</sub>

# SchwingerのProper-time method

このとき、 $\mathcal{H} = -(\gamma^\mu \hat{\Pi}_\mu)^2$  をハミルトニアンと思い、 $e^{i\mathcal{H}s}$  をプロパータイムの発展を表す演算子とみなす。

演算子のプロパータイム発展

$$\hat{O}(t) = e^{-i\mathcal{H}t} \hat{O} e^{i\mathcal{H}t}$$

状態のプロパータイム発展

$$\langle x(t) | = \langle x | e^{-i\mathcal{H}t}$$

ハミルトニアンの表式

$$|x(t)\rangle = e^{i\mathcal{H}t} |x\rangle$$

$$\mathcal{H} = -(i\partial_\mu - eA_\mu)^2 + \frac{1}{2} e\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

$$|x(0)\rangle = |x\rangle$$

とすると、プロパゲータの一部は以下のように書き換えられる。

$$\langle x | -\gamma^\mu \hat{\Pi}_\mu e^{-i\mathcal{H}s} |y\rangle$$

$$= \langle x | e^{-i\mathcal{H}s} e^{i\mathcal{H}s} (-\gamma^\mu \hat{\Pi}_\mu) e^{-i\mathcal{H}s} |y\rangle$$

$$= \langle x(s) | -\gamma^\mu \hat{\Pi}_\mu(s) |y(0)\rangle$$

$$\langle x | -me^{-i\mathcal{H}s} |y\rangle = -m \langle x(s) | y(0)\rangle$$

# SchwingerのProper-time method

評価すべきプロパゲータの表式

$$G(x, y) = i \int_0^\infty ds e^{-im^2 s} \langle x(s) | (-\gamma^\mu \hat{\Pi}_\mu(s) - m) | y(0) \rangle$$

$\hat{\Pi}^\mu(s)$  の  $\hat{x}^\mu(s)$  と  $\hat{x}^\mu(0)$  による表式と振幅  $\langle x(s) | x(0) \rangle$  を求められれば表式が得られる。

ただし、 $\hat{x}^\mu(0)$  と  $\hat{x}^\mu(s)$  は状態  $|x(0)\rangle$  と  $|x(s)\rangle$  の固有演算子であるとする。

$$\hat{x}^\mu(0) |x(0)\rangle = x^\mu |x(0)\rangle$$

$$\langle x(s) | \hat{x}^\mu(s) = x^\mu \langle x(s) |$$

# SchwingerのProper-time method

演算子のプロパータイム発展方程式  
(Heisenberg方程式)

$$\frac{d\hat{x}^\mu(s)}{ds} = -i [\hat{x}^\mu(s), \mathcal{H}]$$

$$\frac{d\hat{\Pi}^\mu(s)}{ds} = -i [\hat{\Pi}^\mu(s), \mathcal{H}]$$

交換関係  $[\hat{x}_\mu, \hat{\Pi}_\nu] = -i\eta_{\mu\nu}$ ,  $[\hat{\Pi}_\mu, \hat{\Pi}_\nu] = -ieF_{\mu\nu}$  を使って整理する。

$$\frac{d\hat{x}^\mu(s)}{ds} = 2\hat{\Pi}^\mu(s)$$

$$\frac{d\hat{\Pi}^\mu(s)}{ds} = e^{i\mathcal{H}s} \left( 2eF^\mu{}_\nu \hat{\Pi}^\nu + ie \frac{\partial F^\mu{}_\nu}{\partial \hat{x}_\nu} + \frac{1}{2} e\sigma^{\nu\lambda} \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial \hat{x}_\mu} \right) e^{-i\mathcal{H}s}$$

# SchwingerのProper-time method

電磁場が変化している場合は、**電磁場の変化のプロパータイム発展**を解かなければならないので、解ける場合は限られている。

$$\frac{d\hat{x}^\mu(s)}{ds} = 2\hat{\Pi}^\mu(s)$$

$$\frac{d\hat{\Pi}^\mu(s)}{ds} = e^{i\mathcal{H}s} \left( 2eF^\mu{}_\nu \hat{\Pi}^\nu + ie \frac{\partial F^\mu{}_\nu}{\partial \hat{x}_\nu} + \frac{1}{2} e \sigma^{\nu\lambda} \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial \hat{x}_\mu} \right) e^{-i\mathcal{H}s}$$

解ける場合 1 : 一定一様の電磁場  $F^{\mu\nu}(x) = F^{\mu\nu}$

$$\frac{d\hat{x}^\mu(s)}{ds} = 2\hat{\Pi}^\mu(s), \quad \frac{d\hat{\Pi}^\mu(s)}{ds} = 2eF^\mu{}_\nu \hat{\Pi}^\nu(s)$$

解ける場合 2 : ヌルの平面電磁波

$$F^{\mu\nu}(x) = f^{\mu\nu} F(\xi)$$

$$\xi = n^\mu x_\mu \quad (n^\mu: \text{null})$$

プロパータイム発展に対して  
保存する量を用いる

# SchwingerのProper-time method

電子プロパゲータのほかにも電磁場の作用の量子補正も求めることができる。

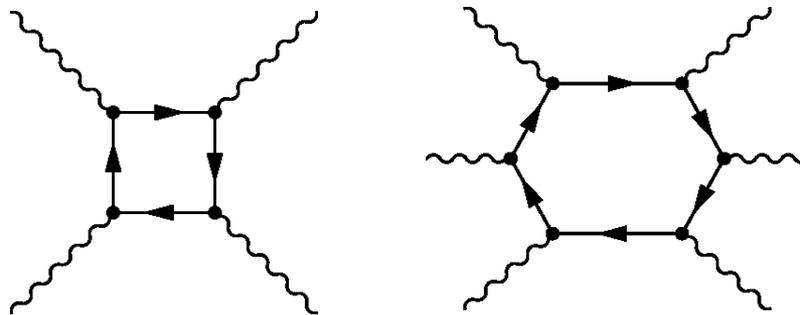
$$\Gamma[A] = - \int d^4x \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

古典的な電磁場の作用



$$- i \ln \int d^4x \det (i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m)$$

電磁場の作用の1ループ補正



# SchwingerのProper-time method

1ループ補正によるMaxwell方程式の補正項は

$$\mathcal{L}^{(1)}(x) = -i \ln \det (i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - m)$$

より

$$\langle j^\mu(x) \rangle \equiv \frac{\delta \mathcal{L}^{(1)}(x)}{\delta A_\mu(x)} = i \text{etr} [\gamma^\mu G(x, x)]$$

がMaxwell方程式に補正項として加わる。

1ループ補正項付きのMaxwell方程式

$$-\square A_\mu(x) + \partial^\nu \partial_\mu A_\nu(x) - \langle j_\mu(x) \rangle = 0$$

# SchwingerのProper-time method

1ループ補正によるMaxwell方程式の補正項（カレントと呼ぶ）

$$\langle j^\mu(x) \rangle \equiv \frac{\delta \mathcal{L}^{(1)}(x)}{\delta A_\mu(x)} = i \text{etr} [\gamma^\mu G(x, x)]$$

カレントをプロパータイムによってあらわすと、

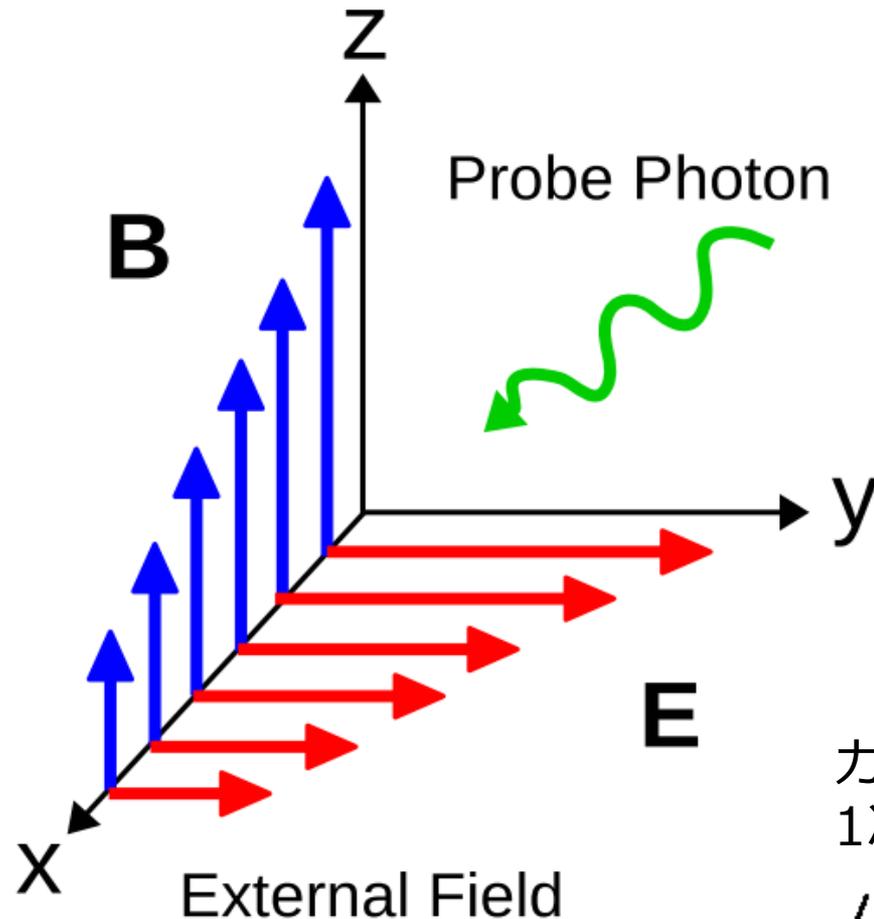
$$\langle j^\mu(x) \rangle = \frac{e}{2} \int_0^\infty ds e^{-im^2 s} \text{tr} \left[ \langle x(s) | \hat{\Pi}^\mu(s) + \hat{\Pi}^\mu(0) | x(0) \rangle \right. \\ \left. - i\sigma^{\mu\nu} \langle x(s) | \hat{\Pi}_\nu(s) - \hat{\Pi}_\nu(0) | x(0) \rangle \right]$$

となる。

カレントの表式が分かれば、そこを通過する電磁波の運動方程式が得られる。その方程式が解ければ、電磁波の偏光ベクトルとそれに対応する屈折率がわかる。

# 考える系

平面電磁波の外場に対してプローブ光子が入射することを考える。外場の変化を1次まで取り入れる。



外場の電磁場テンソル

$$F_{\mu\nu}(x) = f_{\mu\nu}(1 + \Omega n_\alpha x^\alpha)$$

外場のベクトルポテンシャル  $A_\mu(x)$

プローブ光子

(ベクトルポテンシャル)

$$b_\mu(x) = b_\mu \exp(-ik_\alpha x^\alpha)$$

電磁場テンソル

$$g_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu} \exp(-ik_\alpha x^\alpha)$$

カレントはプローブ光子を  
1次まで考える。

$$\langle j_\mu \rangle \sim \Pi_\mu^\nu b_\nu \exp(-ik_\alpha x^\alpha)_{93}$$

# 考える系

厳密には外場 + プローブ光子を取り入れた状態で、プロパータイム発展の方程式を解かなくてはならない。

$$\frac{d\hat{x}^\mu(s)}{ds} = -i [\hat{x}^\mu(s), \mathcal{H}]$$

$$\frac{d\hat{\Pi}^\mu(s)}{ds} = -i [\hat{\Pi}^\mu(s), \mathcal{H}]$$

$$\mathcal{H} = -(i\partial_\mu - eA_\mu(\hat{x}) - eb_\mu(\hat{x}))^2 + \frac{1}{2}e\sigma^{\mu\nu} (F_{\mu\nu}(\hat{x}) + g_{\mu\nu}(\hat{x}))$$

しかし、解けないので平面電磁波のハミルトニアンの部分とプローブ光子によるハミルトニアンに分け、プローブ光子によるものは小さいとする。

$$\mathcal{H} = H^{(0)} + \delta H$$

平面波のみの場合

摂動

$$\delta H = -\hat{\Pi}_\mu^{(0)} \delta \hat{\Pi}^\mu - \delta \hat{\Pi}^\mu \hat{\Pi}_\mu^{(0)} + \frac{1}{2}e\sigma^{\mu\nu} g_{\mu\nu}$$

$$\Pi_\mu^{(0)} = i\partial_\mu - eA_\mu(x)$$

$$\delta \Pi_\mu = -eb_\mu(x)$$

# 相互作用描像による摂動論

カレントの評価を平面電磁波のハミルトニアンによる発展の項で行う。

$$\langle j^\mu(x) \rangle = \frac{e}{2} \int_0^\infty ds e^{-im^2 s} \text{tr} \left[ \langle x(s) | \hat{\Pi}^\mu(s) + \hat{\Pi}^\mu(0) | x(0) \rangle - i\sigma^{\mu\nu} \langle x(s) | \hat{\Pi}_\nu(s) - \hat{\Pi}_\nu(0) | x(0) \rangle \right]$$

振幅を相互作用描像に基づいて評価する。

$$\begin{aligned} & \langle x(s) | \hat{\Pi}^\mu(s) | x(0) \rangle \\ &= \langle x | e^{-i\mathcal{H}s} e^{i\mathcal{H}s} \hat{\Pi}^\mu e^{-i\mathcal{H}s} | x \rangle \\ &= \langle x | e^{-iH^{(0)}s} e^{iH^{(0)}s} \hat{\Pi}^\mu e^{-iH^{(0)}s} e^{iH^{(0)}s} e^{-i\mathcal{H}s} | x \rangle \\ &= \langle x^{(0)}(s) | \hat{\Pi}_I^\mu(s) U(s) | x(0) \rangle \\ & \langle x(s) | \hat{\Pi}^\mu(0) | x(0) \rangle \\ &= \langle x^{(0)}(s) | U(s) \hat{\Pi}_I^\mu(0) | x(0) \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle x^{(0)}(s) | &= \langle x | e^{-iH^{(0)}s} \\ | x(0) \rangle &= | x \rangle \\ U(s) &= e^{iH^{(0)}s} e^{-i\mathcal{H}s} \\ &\simeq 1 - i \int_0^s dt \delta H_I(t) \\ \hat{\Pi}_I^\mu(s) &= e^{iH^{(0)}s} \hat{\Pi}^\mu e^{-iH^{(0)}s} \\ \hat{\Pi}_I^\mu(0) &= \hat{\Pi}^\mu \end{aligned}$$

# 相互作用描像による摂動論

以下では相互作用描像であることを表す添え字の(0)やIは省略する。以下のプロパータイム発展演算子を用いて振幅を表す。

$$\begin{aligned}
 U(s) &= 1 - i \int_0^s du \delta H(u) \\
 &= 1 - i \int_0^s du \left\{ e^{\hat{\Pi}^\alpha(u)} b_\alpha \exp[-ik_\delta \hat{x}^\delta(u)] \right. \\
 &\quad \left. + e b_\alpha \exp[-ik_\delta \hat{x}^\delta(u)] \hat{\Pi}^\alpha(u) + \frac{1}{2} e \sigma^{\alpha\beta}(u) g_{\alpha\beta} \exp[-ik_\delta \hat{x}^\delta(u)] \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\langle x(s) | \hat{\Pi}^\mu(s) U(s) | x(0) \rangle \\
 = &\langle x(s) | \hat{\Pi}^\mu(s) | x(0) \rangle \\
 &- i \int_0^s du \langle x(s) | 2e b_\alpha \hat{\Pi}^\mu(s) \hat{\Pi}^\alpha(u) \exp[-ik_\delta \hat{x}^\delta(u)] | x(0) \rangle \\
 &- i \int_0^s du \langle x(s) | -e b_\alpha k^\alpha \hat{\Pi}^\mu(s) \exp[-ik_\delta \hat{x}^\delta(u)] | x(0) \rangle \\
 &+ \int_0^s du \langle x(s) | \hat{\Pi}^\mu(s) \exp[-ik_\delta \hat{x}^\delta(u)] | x(0) \rangle \\
 &\times \left( -\frac{ie}{2} \right) \left[ (\sigma g) + \frac{ie u}{2} \{(\sigma f)(\sigma g) - (\sigma g)(\sigma f)\} + \frac{e^2 u^2}{4} (\sigma f)(\sigma g)(\sigma f) \right] \\
 &+ \int_0^s du \langle x(s) | \hat{\Pi}^\mu(s) \exp[-ik_\delta \hat{x}^\delta(u)] | x(0) \rangle \\
 &\times \left( -\frac{ie}{2} \right) \left[ \frac{ie u}{2} \{(\sigma f)(\sigma g) - (\sigma g)(\sigma f)\} (\Omega \xi) + \frac{e^2 u^2}{2} (\sigma f)(\sigma g)(\sigma f)(\Omega \xi) \right] \\
 &\langle x(s) | U(s) \hat{\Pi}^\mu(0) | x(0) \rangle \\
 = &\langle x(s) | \hat{\Pi}^\mu(0) | x(0) \rangle \\
 &- i \int_0^s du \langle x(s) | 2e b_\alpha \hat{\Pi}^\alpha(u) \exp[-ik_\delta \hat{x}^\delta(u)] \hat{\Pi}^\mu(0) | x(0) \rangle \\
 &- i \int_0^s du \langle x(s) | -e b_\alpha k^\alpha \exp[-ik_\delta \hat{x}^\delta(u)] \hat{\Pi}^\mu(0) | x(0) \rangle \\
 &+ \int_0^s du \langle x(s) | \exp[-ik_\delta \hat{x}^\delta(u)] \hat{\Pi}^\mu(0) | x(0) \rangle \\
 &\times \left( -\frac{ie}{2} \right) \left[ (\sigma g) + \frac{ie u}{2} \{(\sigma f)(\sigma g) - (\sigma g)(\sigma f)\} + \frac{e^2 u^2}{4} (\sigma f)(\sigma g)(\sigma f) \right] \\
 &+ \int_0^s du \langle x(s) | \exp[-ik_\delta \hat{x}^\delta(u)] \hat{\Pi}^\mu(0) | x(0) \rangle \\
 &\times \left( -\frac{ie}{2} \right) \left[ \frac{ie u}{2} \{(\sigma f)(\sigma g) - (\sigma g)(\sigma f)\} (\Omega \xi) + \frac{e^2 u^2}{2} (\sigma f)(\sigma g)(\sigma f)(\Omega \xi) \right] \\
 &+ \int_0^s du \langle x(s) | \exp[-ik_\delta \hat{x}^\delta(u)] | x(0) \rangle \\
 &\times \left( -\frac{ie}{2} \right) (-in^\mu) \left[ \frac{ie u}{2} \{(\sigma f)(\sigma g) - (\sigma g)(\sigma f)\} \Omega + \frac{e^2 u^2}{2} (\sigma f)(\sigma g)(\sigma f) \Omega \right]
 \end{aligned}$$

# 相互作用描像による摂動論

振幅  $\langle x^{(0)}(s) | U(s) \hat{\Pi}_I^\mu(0) | x(0) \rangle$  などに含まれる  $\hat{x}^\mu(s)$ ,  $\hat{\Pi}^\mu(s)$  などは平面電磁波の外場だけを考えた時の演算子である。これらの演算子などをすべて  $\hat{x}^\mu(s)$ ,  $\hat{x}^\mu(0)$ ,  $\xi(s) = n_\mu \hat{x}^\mu(s)$  と  $\xi(0) = n_\mu \hat{x}^\mu(0)$  で表し、

$$\langle x(s) | \hat{x}^\mu(s) = x^\mu \langle x(s) |,$$

$$\langle x(s) | \xi(s) = \xi \langle x(s) |,$$

$$\hat{x}^\mu(0) | x(0) \rangle = x^\mu | x(0) \rangle,$$

$$\xi(0) | x(0) \rangle = \xi | x(0) \rangle.$$

によって演算子を期待値に書き換えていく。

# 求める項

$$\begin{aligned} & \langle x(s) | \hat{\Pi}^\mu(s) | x(0) \rangle, \\ & \langle x(s) | \hat{\Pi}^\mu(0) | x(0) \rangle, \\ & \langle x(s) | \exp[-ik_\delta \hat{x}^\delta(u)] | x(0) \rangle, \\ & \langle x(s) | \hat{\Pi}^\alpha(u) \exp[-ik_\delta \hat{x}^\delta(u)] | x(0) \rangle, \\ & \langle x(s) | \hat{\Pi}^\mu(s) \exp[-ik_\delta \hat{x}^\delta(u)] | x(0) \rangle, \\ & \langle x(s) | \exp[-ik_\delta \hat{x}^\delta(u)] \hat{\Pi}^\mu(0) | x(0) \rangle, \\ & \langle x(s) | \hat{\Pi}^\mu(s) \hat{\Pi}^\alpha(u) \exp[-ik_\delta \hat{x}^\delta(u)] | x(0) \rangle, \\ & \langle x(s) | \hat{\Pi}^\alpha(u) \exp[-ik_\delta \hat{x}^\delta(u)] \hat{\Pi}^\mu(0) | x(0) \rangle. \end{aligned}$$

すべての  $\hat{x}^\mu(s)$  が  $\hat{x}^\mu(0)$  の左側に存在するように並べ替える。

※外場の変化を入れると計算量がものすごく増えます。

# 必要な演算子と振幅と交換関係

$$\begin{aligned}
 \hat{\Pi}^\mu(s) &= \frac{\hat{x}^\mu(s) - \hat{x}^\mu(0)}{2s} + \frac{e}{2} f^\mu{}_\nu (\hat{x}^\nu(s) - \hat{x}^\nu(0)) \\
 &+ \Omega \frac{e}{2} f^\mu{}_\nu (\hat{x}^\nu(s) - \hat{x}^\nu(0)) \left( \frac{2}{3} \xi(s) + \frac{1}{3} \xi(0) \right) + n^\mu e^2 f^2 s \left( \frac{1}{6} \xi(s) - \frac{1}{6} \xi(0) \right) \\
 &+ \Omega n^\mu e^2 f^2 s \left( \frac{1}{4} \xi^2(s) - \frac{1}{6} \xi(s) \xi(0) - \frac{1}{12} \xi^2(0) \right) + \frac{1}{4} \Omega e s n^\mu (\sigma f),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{x}^\mu(u) &= \hat{x}^\mu(0) + \frac{u}{s} (\hat{x}^\mu(s) - \hat{x}^\mu(0)) \\
 &+ e f^\mu{}_\nu (\hat{x}^\nu(s) - \hat{x}^\nu(0)) \\
 &\quad \times \left[ -u + \frac{u^2}{s} + \Omega \left\{ \left( -\frac{u}{3} + \frac{1}{3} \frac{u^3}{s^2} \right) \xi(s) + \left( -\frac{2}{3} u + \frac{u^2}{s} - \frac{1}{3} \frac{u^3}{s^2} \right) \xi(0) \right\} \right] \\
 &+ n^\mu e^2 f^2 \left\{ \left( \frac{su}{3} - u^2 + \frac{2}{3} \frac{u^3}{s} \right) \xi(s) + \left( -\frac{su}{3} + u^2 - \frac{2}{3} \frac{u^3}{s} \right) \xi(0) \right\} \\
 &+ \Omega n^\mu e^2 f^2 \left\{ \left( \frac{su}{6} - \frac{1}{3} u^2 - \frac{1}{3} \frac{u^3}{s} + \frac{1}{2} \frac{u^4}{s^2} \right) \xi^2(s) \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{su}{3} - \frac{4}{3} u^2 + 2 \frac{u^3}{s} - \frac{u^4}{s^2} \right) \xi(s) \xi(0) + \left( -\frac{su}{2} + \frac{5}{3} u^2 - \frac{5}{3} \frac{u^3}{s} + \frac{1}{2} \frac{u^4}{s^2} \right) \xi^2(0) \right\} \\
 &+ \frac{1}{2} \Omega e \sigma^{\nu\lambda} f_{\nu\lambda} n^\mu (u^2 - su).
 \end{aligned}$$

$$\langle x(s) | x(0) \rangle = \frac{1}{i(4\pi)^2 s^2} \left( \mathbf{1} - \frac{ies}{2} (\sigma f) (1 + \Omega \xi) \right)$$

$$\begin{aligned}
 &[\hat{x}^\mu(0), \hat{x}^\alpha(s)] \\
 &= -2is\eta^{\mu\alpha} + 2ies^2 f^{\mu\alpha} - \frac{4}{3} in^\mu n^\alpha e^2 f^2 s^3 + i\Omega es^2 f^{\mu\alpha} \left( \frac{4}{3} \xi(s) + \frac{2}{3} \xi(0) \right) \\
 &\quad - \frac{2}{3} i\Omega es^2 n^\alpha f^\mu{}_\nu [\hat{x}^\nu(s) - \hat{x}^\nu(0)] + i\Omega n^\mu n^\alpha e^2 f^2 s^3 \left( -\frac{4}{3} \xi(s) - \frac{4}{3} \xi(0) \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{\Pi}^\mu(0) &= \frac{\hat{x}^\mu(s) - \hat{x}^\mu(0)}{2s} - \frac{e}{2} f^\mu{}_\nu (\hat{x}^\nu(s) - \hat{x}^\nu(0)) \\
 &+ \Omega \frac{e}{2} f^\mu{}_\nu (\hat{x}^\nu(s) - \hat{x}^\nu(0)) \left( -\frac{1}{3} \xi(s) - \frac{2}{3} \xi(0) \right) + n^\mu e^2 f^2 s \left( \frac{1}{6} \xi(s) - \frac{1}{6} \xi(0) \right) \\
 &+ \Omega n^\mu e^2 f^2 s \left( \frac{1}{12} \xi^2(s) + \frac{1}{6} \xi(s) \xi(0) - \frac{1}{4} \xi^2(0) \right) - \frac{1}{4} \Omega e s n^\mu (\sigma f).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \hat{\Pi}^\mu(u) &= \frac{\hat{x}^\mu(s) - \hat{x}^\mu(0)}{2s} \\
 &+ e f^\mu{}_\nu (\hat{x}^\nu(s) - \hat{x}^\nu(0)) \\
 &\quad \times \left[ -\frac{1}{2} + \frac{u}{s} + \Omega \left\{ \left( \frac{1}{2} \left( \frac{u}{s} \right)^2 - \frac{1}{6} \right) \xi(s) + \left( -\frac{1}{2} \left( \frac{u}{s} \right)^2 + \frac{u}{s} - \frac{1}{3} \right) \xi(0) \right\} \right] \\
 &+ n^\mu e^2 f^2 s \left[ \left\{ \frac{1}{6} - \frac{u}{s} + \left( \frac{u}{s} \right)^2 \right\} \xi(s) + \left\{ -\frac{1}{6} + \frac{u}{s} - \left( \frac{u}{s} \right)^2 \right\} \xi(0) \right] \\
 &+ \Omega n^\mu e^2 f^2 s \left[ \left\{ \frac{1}{12} - \frac{1}{3} \left( \frac{u}{s} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{u}{s} \right)^2 + \left( \frac{u}{s} \right)^3 \right\} \xi^2(s) \right. \\
 &\quad \left. + \left\{ \frac{1}{6} - \frac{4u}{3s} + 3 \left( \frac{u}{s} \right)^2 - 2 \left( \frac{u}{s} \right)^3 \right\} \xi(s) \xi(0) + \left\{ -\frac{1}{4} + \frac{5u}{3s} - \frac{5}{2} \left( \frac{u}{s} \right)^2 + \left( \frac{u}{s} \right)^3 \right\} \xi^2(0) \right] \\
 &+ \Omega e \sigma^{\nu\lambda} f_{\nu\lambda} n^\mu s \left( -\frac{1}{4} + \frac{1u}{2s} \right).
 \end{aligned}$$

# 結果

$$\langle j_\mu(x) \rangle = \Pi_\mu^\nu(k, x) b_\nu(k, x) \exp(-ik_\alpha x^\alpha)$$

$$\Pi_\mu^\nu = \int_0^\infty ds \int_0^s du \left[ \Pi_1(fk)_\mu(fk)^\nu + \Pi_2(\tilde{f}k)_\mu(\tilde{f}k)^\nu + \Pi_3 G_\mu G^\nu \right]$$

$$(fk)_\mu = f_\mu^\nu k_\nu, \quad (\tilde{f}k)_\mu = \tilde{f}_\mu^\nu k_\nu, \quad G_\mu = \frac{k_\alpha k^\alpha}{k_\beta f^\beta_\gamma f^\gamma_\delta k^\delta} f_\mu^\nu f_\nu^\lambda k_\lambda,$$

$$\begin{aligned} \Pi_1 = & \frac{e^2 e^{-im^2 s}}{72\pi^2 s^3 (k f f k)} \exp \left[ i \left( u - \frac{u^2}{s} \right) (k k) \right] \\ & \times \left( -1 + \exp \left[ \frac{i(s-u)^2 u^2 e^2 (k f f k)}{3s} \right] \right) (-18i - 9s(kk)) \\ & + \frac{e^2 e^{-im^2 s}}{72\pi^2 s^3} \exp \left[ i \left( u - \frac{u^2}{s} \right) (k k) + \frac{i(s-u)^2 u^2 e^2 (k f f k)}{3s} \right] \\ & \times e^2 \left( -\frac{18}{s} \right) u(s^3 - 3s^2 u + 4su^2 - 2u^3) \\ & + \frac{e^2 e^{-im^2 s}}{72\pi^2 s^3} \exp \left[ i \left( u - \frac{u^2}{s} \right) (k k) + \frac{i(s-u)^2 u^2 e^2 (k f f k)}{3s} \right] \\ & \times \left[ \left( \frac{2}{s^2} e^2 (\Omega k n) (s-u) u (6s^4 + 22s^3 u - 79s^2 u^2 + 78su^3 - 36u^4) \right) \right. \\ & \left. + \left( -\frac{4i}{s^2} \right) e^4 (k f f k) (\Omega k n) (s-u)^3 u^2 (3s^4 - 7s^3 u + 5s^2 u^2 + 4su^3 - 6u^4) \right. \\ & \left. + (-2i) e^2 (\Omega k n) (k k) (s-u)^2 u (3s^2 - su - 3u^2) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_2 = & \frac{e^2 e^{-im^2 s}}{72\pi^2 s^3 (k f f k)} \exp \left[ i \left( u - \frac{u^2}{s} \right) (k k) \right] \\ & \times \left( -1 + \exp \left[ \frac{i(s-u)^2 u^2 e^2 (k f f k)}{3s} \right] \right) (-18i - 9s(kk)) \\ & + \frac{e^2 e^{-im^2 s}}{72\pi^2 s^3} \exp \left[ i \left( u - \frac{u^2}{s} \right) (k k) + \frac{i(s-u)^2 u^2 e^2 (k f f k)}{3s} \right] e^2 (-18) su(s-u) \\ & + \frac{e^2 e^{-im^2 s}}{72\pi^2 s^3} \exp \left[ i \left( u - \frac{u^2}{s} \right) (k k) + \frac{i(s-u)^2 u^2 e^2 (k f f k)}{3s} \right] \\ & \times \left[ \left( \frac{2}{s} e^2 (\Omega k n) (s-u) u (6s^3 + 4s^2 u - 7su^2 + 6u^3) \right) \right. \\ & \left. + (-2i) e^2 (\Omega k n) (k k) (s-u)^2 u (3s^2 - su - 3u^2) \right. \\ & \left. + (-4i) e^4 (k f f k) (\Omega k n) (s-u)^3 u^2 (3s^2 - su - 3u^2) \right], \end{aligned}$$

# 結果の続きと問題点

$$\Pi_{\mu}^{\nu} = \int_0^{\infty} ds \int_0^s du \left[ \Pi_1 (fk)_{\mu} (fk)^{\nu} + \Pi_2 (\tilde{f}k)_{\mu} (\tilde{f}k)^{\nu} + \Pi_3 G_{\mu} G^{\nu} \right]$$

$$(fk)_{\mu} = f_{\mu}^{\nu} k_{\nu}, \quad (\tilde{f}k)_{\mu} = \tilde{f}_{\mu}^{\nu} k_{\nu}, \quad G_{\mu} = \frac{k_{\alpha} k^{\alpha}}{k_{\beta} f^{\beta}_{\gamma} f^{\gamma}_{\delta} k^{\delta}} f_{\mu}^{\nu} f_{\nu}^{\lambda} k_{\lambda},$$

$$\begin{aligned} \Pi_3 = & \frac{e^2 e^{-im^2 s}}{72\pi^2 s^4 (kk)} \exp \left[ i \left( u - \frac{u^2}{s} \right) (kk) \right] \\ & \times \left( -1 + \exp \left[ \frac{i(s-u)^2 u^2 e^2 (kffk)}{3s} \right] \right) (-6is + (-3s^2 + 16su - 16u^2)(kk)) \\ & + \frac{e^4 (kffk) e^{-im^2 s}}{324\pi^2 s^4 (kk)^2} \exp \left[ i \left( u - \frac{u^2}{s} \right) (kk) + \frac{i(s-u)^2 u^2 e^2 (kffk)}{3s} \right] \\ & \times [3i(s^3 - 6s^2 u + 6su^2) - 2u^2(s^2 - 3su + 2u^2)e^2(kffk) \\ & \quad - 12(s-2u)^2(s-u)u(kk)] \\ & - \frac{ie^2 e^{-im^2 s}}{27(kk)^2 \pi^2 s^4} \exp \left[ i \left( u - \frac{u^2}{s} \right) (kk) + \frac{i(s-u)^2 u^2 e^2 (kffk)}{3s} \right] \\ & \times (\Omega kn) e^2 (kffk) (s-u) u (s^2 - 5su + 5u^2) \\ & - \frac{e^2 e^{-im^2 s}}{972(kk)^2 \pi^2 s^5} \exp \left[ i \left( u - \frac{u^2}{s} \right) (kk) + \frac{i(s-u)^2 u^2 e^2 (kffk)}{3s} \right] \\ & \times (\Omega kn) e^2 (kffk) (s-u)^2 u \\ & \quad \times [2e^2 (kffk) (3s^5 - 19s^4 u + 6s^3 u^2 + 87s^2 u^3 - 138su^4 + 60u^5) \\ & \quad - 9(6s^3 + 9s^2 u - 46su^2 + 40u^3)(kk)] \\ & - \frac{ie^2 e^{-im^2 s}}{2916(kk)^2 \pi^2 s^5} \exp \left[ i \left( u - \frac{u^2}{s} \right) (kk) + \frac{i(s-u)^2 u^2 e^2 (kffk)}{3s} \right] \\ & \times (\Omega kn) e^2 (kffk) (s-u)^2 u (3s^2 - su - 3u^2) \\ & \times [4e^4 (kffk)^2 u^2 (s^2 - 3su + 2u^2)^2 + 24e^2 (kffk)(kk)(s-2u)^2 (s-u)u \\ & \quad + 9(3s^2 - 16su + 16u^2)(kk)^2], \end{aligned}$$

## 問題点

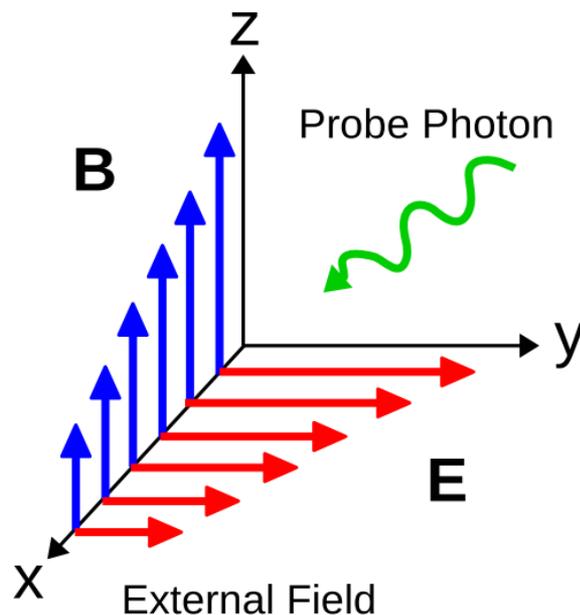
- Furryの定理を破る外場が奇数個含まれる項が現れるがそれを取り除いた。Furryの定理はProper-time methodにおいても成り立つことは示した。
- ゲージ自由度の部分にこの表式に当てはまらない項が存在したがそれも取り除いた。

# ここまでのまとめ：取り扱う問題

平面電磁波を通過するプローブ光子の固有モードとその屈折率を求める。

## Maxwell方程式

$$\square b_{\mu}(x) - \partial^{\nu} \partial_{\mu} b_{\nu}(x) + \Pi_{\mu}{}^{\nu} b_{\nu}(x) = 0$$





# ここまでのまとめ：真空偏極テンソルの表式

$$\Pi_{\mu}{}^{\nu} = \int_0^{\infty} ds \int_0^s dt \left[ \Pi_1(fk)_{\mu}(fk)^{\nu} + \Pi_2(\tilde{f}k)_{\mu}(\tilde{f}k)^{\nu} + \Pi_3 G_{\mu} G^{\nu} \right],$$

$$(fk)_{\mu} = f_{\mu}{}^{\nu} k_{\nu}, \quad (\tilde{f}k)_{\mu} = \tilde{f}_{\mu}{}^{\nu} k_{\nu},$$

$$G_{\mu} = \frac{k_{\alpha} k^{\alpha}}{k_{\beta} f^{\beta}{}_{\gamma} f^{\gamma}{}_{\delta} k^{\delta}} f_{\mu}{}^{\nu} f_{\nu}{}^{\lambda} k_{\lambda},$$

$$\begin{aligned} \Pi_1 = & \frac{e^2 e^{-im^2 s}}{72\pi^2 s^3 (k f f k)} \exp \left[ i \left( t - \frac{t^2}{s} \right) (kk) \right] \left( -1 + \exp \left[ \frac{i(s-t)^2 t^2 e^2 (k f f k)}{3s} \right] \right) (-18i - 9s(kk)) \\ & + \frac{e^2 e^{-im^2 s}}{72\pi^2 s^3 (k f f k)} \exp \left[ i \left( t - \frac{t^2}{s} \right) (kk) + \frac{i(s-t)^2 t^2 e^2 (k f f k)}{3s} \right] e^2 (k f f k) \left( -\frac{18}{s} \right) t(s^3 - 3s^2 t + 4st^2 - 2t^3) \\ & + \frac{e^2 e^{-im^2 s}}{72\pi^2 s^3 (k f f k)} \exp \left[ i \left( t - \frac{t^2}{s} \right) (kk) + \frac{i(s-t)^2 t^2 e^2 (k f f k)}{3s} \right] \\ & \times \left[ \left( \frac{2}{s^2} e^2 (k f f k) (\Omega k n) (s-t)t(6s^4 + 22s^3 t - 79s^2 t^2 + 78st^3 - 36t^4) \right) \right. \\ & + (-2i) e^2 (k f f k) (\Omega k n) (kk) (s-t)^2 t(3s^2 - st - 3t^2) \\ & \left. + \left( -\frac{4i}{s^2} \right) e^4 (k f f k)^2 (\Omega k n) (s-t)^3 t^2 (3s^4 - 7s^3 t + 5s^2 t^2 + 4st^3 - 6t^4) \right], \end{aligned}$$

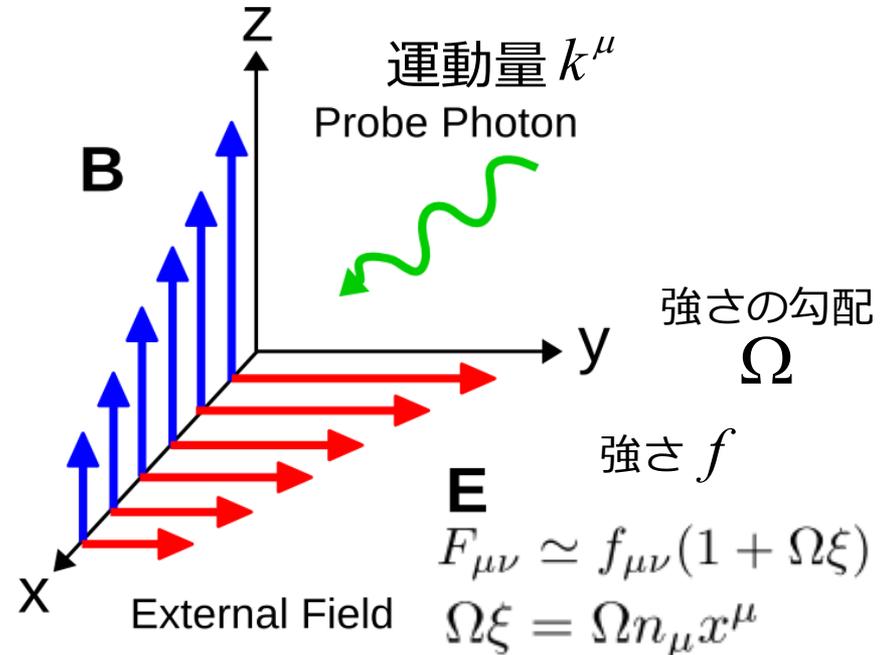
$$\begin{aligned} \Pi_2 = & \frac{e^2 e^{-im^2 s}}{72\pi^2 s^3 (k f f k)} \exp \left[ i \left( t - \frac{t^2}{s} \right) (kk) \right] \left( -1 + \exp \left[ \frac{i(s-t)^2 t^2 e^2 (k f f k)}{3s} \right] \right) (-18i - 9s(kk)) \\ & + \frac{e^2 e^{-im^2 s}}{72\pi^2 s^3 (k f f k)} \exp \left[ i \left( t - \frac{t^2}{s} \right) (kk) + \frac{i(s-t)^2 t^2 e^2 (k f f k)}{3s} \right] e^2 (k f f k) (-18) st(s-t) \\ & + \frac{e^2 e^{-im^2 s}}{72\pi^2 s^3 (k f f k)} \exp \left[ i \left( t - \frac{t^2}{s} \right) (kk) + \frac{i(s-t)^2 t^2 e^2 (k f f k)}{3s} \right] \\ & \times \left[ \left( \frac{2}{s} e^2 (k f f k) (\Omega k n) (s-t)t(6s^3 + 4s^2 t - 7st^2 + 6t^3) \right) \right. \\ & + (-2i) e^2 (k f f k) (\Omega k n) (kk) (s-t)^2 t(3s^2 - st - 3t^2) \\ & \left. + (-4i) e^4 (k f f k)^2 (\Omega k n) (s-t)^3 t^2 (3s^2 - st - 3t^2) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_3 = & \frac{e^2 e^{-im^2 s}}{72\pi^2 s^4 (kk)} \exp \left[ i \left( t - \frac{t^2}{s} \right) (kk) \right] \left( -1 + \exp \left[ \frac{i(s-t)^2 t^2 e^2 (k f f k)}{3s} \right] \right) (-6is + (-3s^2 + 16st - 16t^2)(kk)) \\ & + \frac{e^4 (k f f k) e^{-im^2 s}}{324\pi^2 s^4 (kk)^2} \exp \left[ i \left( t - \frac{t^2}{s} \right) (kk) + \frac{i(s-t)^2 t^2 e^2 (k f f k)}{3s} \right] \\ & \times \left[ 3i(s^3 - 6s^2 t + 6st^2) - 2t^2(s^2 - 3st + 2t^2) e^2 (k f f k) - 12(s-t)^2 (s-t)t(kk) \right] \\ & - \frac{i e^2 e^{-im^2 s}}{27(kk)^2 \pi^2 s^4} \exp \left[ i \left( t - \frac{t^2}{s} \right) (kk) + \frac{i(s-t)^2 t^2 e^2 (k f f k)}{3s} \right] (\Omega k n) e^2 (k f f k) (s-t)t(s^2 - 5st + 5t^2) \\ & - \frac{e^2 e^{-im^2 s}}{972(kk)^2 \pi^2 s^5} \exp \left[ i \left( t - \frac{t^2}{s} \right) (kk) + \frac{i(s-t)^2 t^2 e^2 (k f f k)}{3s} \right] (\Omega k n) e^2 (k f f k) (s-t)^2 t \\ & \times \left[ 2e^2 (k f f k) (3s^5 - 19s^4 t + 6s^3 t^2 + 87s^2 t^3 - 138st^4 + 60t^5) - 9(6s^3 + 9s^2 t - 46st^2 + 40t^3)(kk) \right] \\ & - \frac{i e^2 e^{-im^2 s}}{2916(kk)^2 \pi^2 s^5} \exp \left[ i \left( t - \frac{t^2}{s} \right) (kk) + \frac{i(s-t)^2 t^2 e^2 (k f f k)}{3s} \right] (\Omega k n) e^2 (k f f k) (s-t)^2 t(3s^2 - st - 3t^2) \\ & \times \left[ 4e^4 (k f f k)^2 t^2 (s^2 - 3st + 2t^2) + 24e^2 (k f f k) (kk) (s-2t)(s-t) + 9(3s^2 - 16st + 16t^2)(kk)^2 \right], \end{aligned}$$

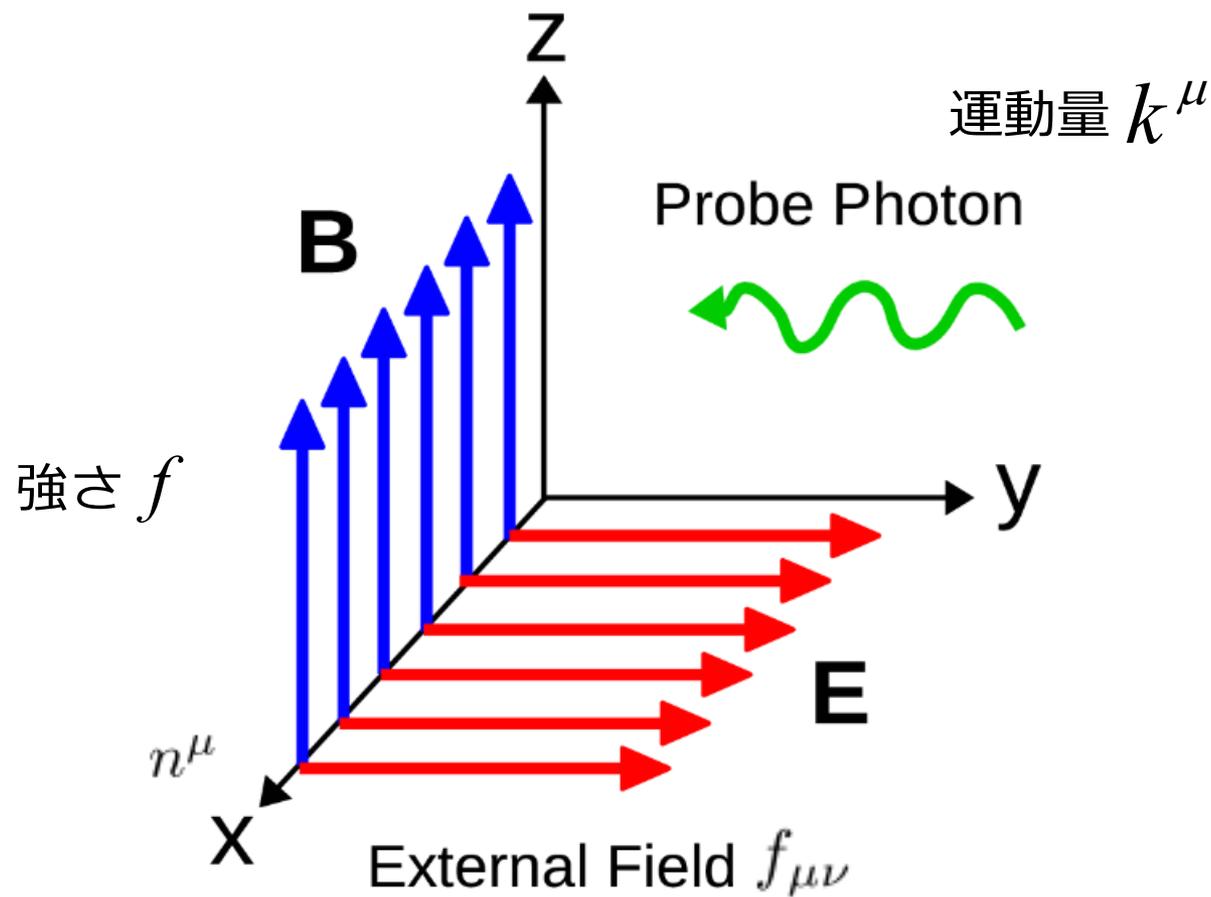
$$(kk) = k_{\mu} k^{\mu}$$

$$(k f f k) = k_{\mu} f^{\mu}{}_{\nu} f^{\nu}{}_{\lambda} k^{\lambda}$$

$$(\Omega k n) = \Omega k_{\mu} n^{\mu}$$

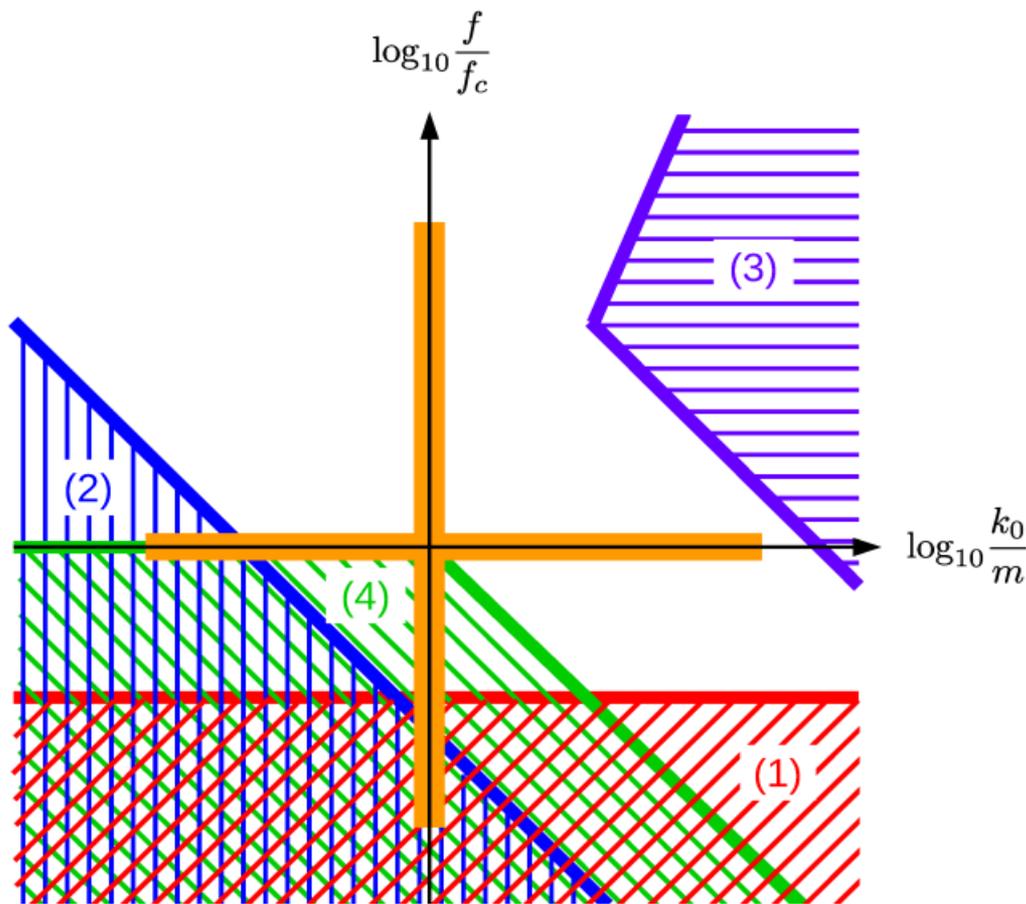


# 結果：外場はCrossed Field



先行研究と比較しつつ、定量的に評価する

# Crossed Fieldの真空偏極の今までの理解



(1) J. S. Toll (1952)

$$f/f_c \ll 1$$

(2) R. Baier, P. Breitenlohner (1967),  
N. B. Narozhnyi (1969),  
V. I. Ritus (1972)

$$e^2 k_\mu f^\mu {}_\nu f^{\nu\lambda} k_\lambda / m^6 \ll 1$$

(3) N. B. Narozhnyi (1969)

$$1 \ll e^2 k_\mu f^\mu {}_\nu f^{\nu\lambda} k_\lambda / m^6 \\ \ll (k_0/m)^6 \times \alpha^{-3}$$

(4) T. Heinzl, O. Schroder (2006)

$$(f/f_c) \lesssim 1$$

$$(f/f_c) \times (k_0/m) \lesssim 1$$

オレンジ色の領域を計算

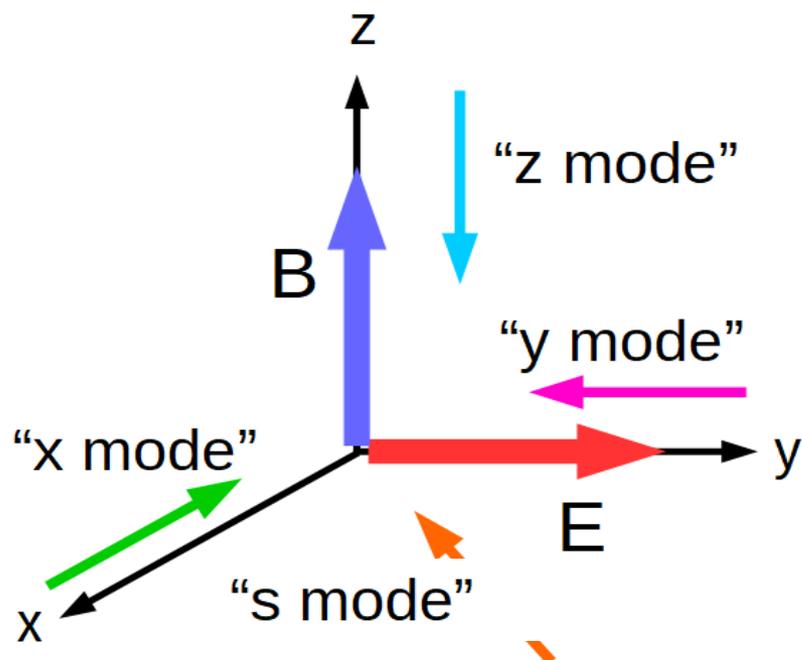
# プローブ光子の伝播

Maxwell方程式

$$b_\mu(x) = b_\mu \exp(-ik_\alpha x^\alpha)$$

$$\square b_\mu(x) - \partial^\nu \partial_\mu b_\nu(x) + \Pi_\mu{}^\nu b_\nu(x) = 0$$

固有モード  $b_\mu$       屈折率  $\frac{k_0}{|\mathbf{k}|}$



probe momentum $k_\mu$	eigenmode	mode name
$(k_0, k_1, 0, 0)$	$(0, 0, 1, 0)_\mu$	x2 mode
	$(0, 0, 0, 1)_\mu$	x3 mode
$(k_0, 0, k_2, 0)$	$(k_2, -k_2, k_0, 0)_\mu$	y1 mode
	$(0, 0, 0, 1)_\mu$	y3 mode
$(k_0, 0, 0, k_3)$	$(k_3, -k_3, 0, k_0)_\mu$	z1 mode
	$(0, 0, 1, 0)_\mu$	z2 mode
$(k_0, \frac{k_i}{\sqrt{3}}, \frac{k_i}{\sqrt{3}}, \frac{k_i}{\sqrt{3}})$	$(A, B, 1, 0)_\mu$	s2 mode <sup>a</sup>
	$(A, B, 0, 1)_\mu$	s3 mode

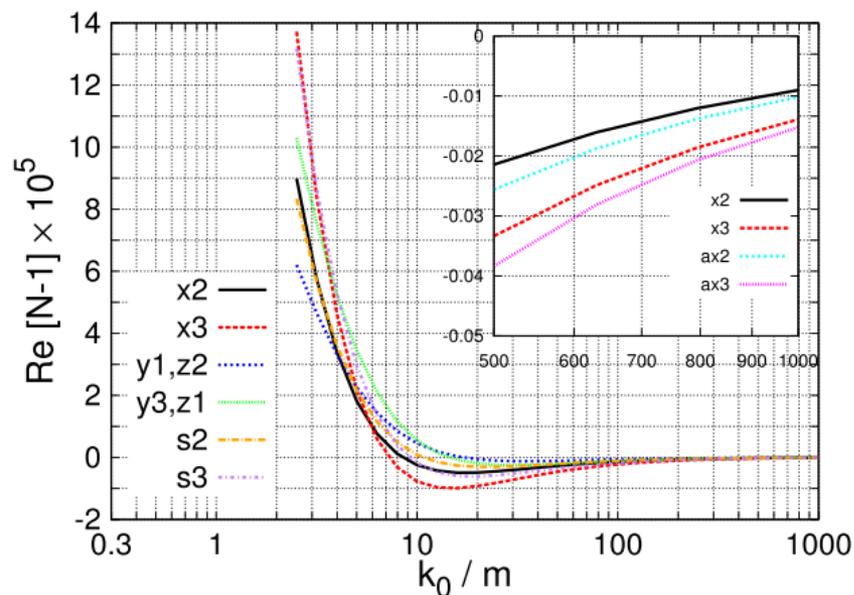
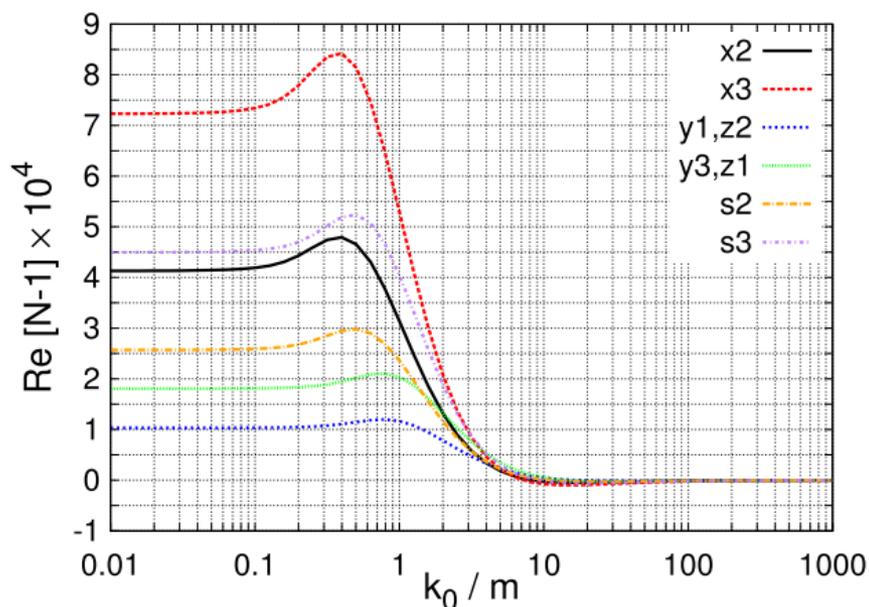
<sup>a</sup>  $A, B$  are constants written with  $k_0$  and  $k_i$ .

# 光子のエネルギーに対する屈折率の実部

$$0.01 \leq k_0/m \leq 1000$$

$$f/f_c = 1 \quad f_c = m^2/e$$

(critical field)



$$N_{x2} \simeq 1 + \frac{2\alpha}{45\pi} \frac{\kappa^2 m^2}{k_0^2},$$

$$N_{x3} \simeq 1 + \frac{7\alpha}{90\pi} \frac{\kappa^2 m^2}{k_0^2},$$

$$N_{x2} \simeq 1 - \frac{\sqrt{3}\alpha m^2}{14\pi^2 k_0^2} (3\kappa)^{2/3} \Gamma^4\left(\frac{2}{3}\right) (1 - i\sqrt{3}),$$

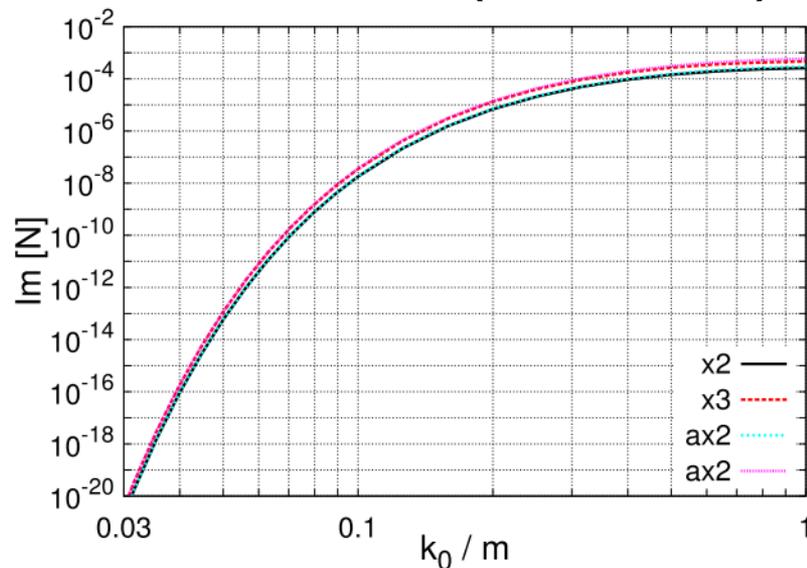
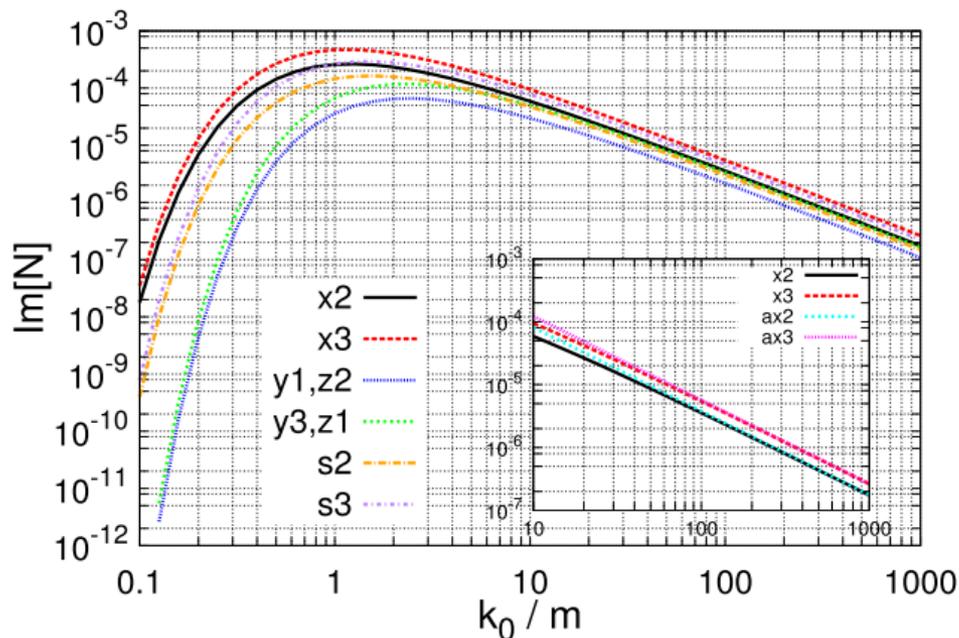
$$N_{x3} \simeq 1 - \frac{3\sqrt{3}\alpha m^2}{28\pi^2 k_0^2} (3\kappa)^{2/3} \Gamma^4\left(\frac{2}{3}\right) (1 - i\sqrt{3}),$$

# 光子のエネルギーに対する屈折率の虚部

$$0.01 \leq k_0/m \leq 1000$$

$$f/f_c = 1 \quad f_c = m^2/e$$

(critical field)



$$N_{x2} \simeq 1 - \frac{\sqrt{3}\alpha m^2}{14\pi^2 k_0^2} (3\kappa)^{2/3} \Gamma^4\left(\frac{2}{3}\right) (1 - i\sqrt{3}),$$

$$N_{x3} \simeq 1 - \frac{3\sqrt{3}\alpha m^2}{28\pi^2 k_0^2} (3\kappa)^{2/3} \Gamma^4\left(\frac{2}{3}\right) (1 - i\sqrt{3}),$$

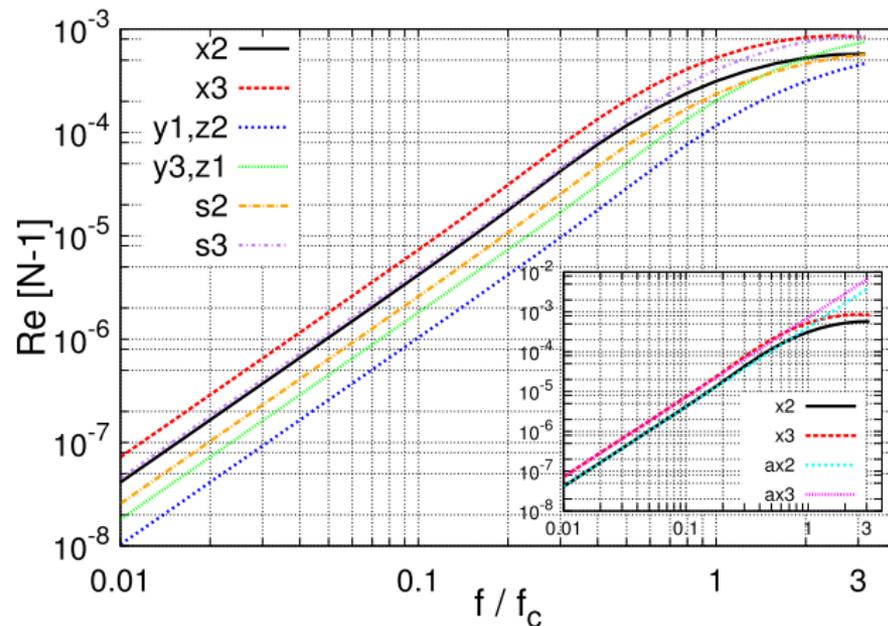
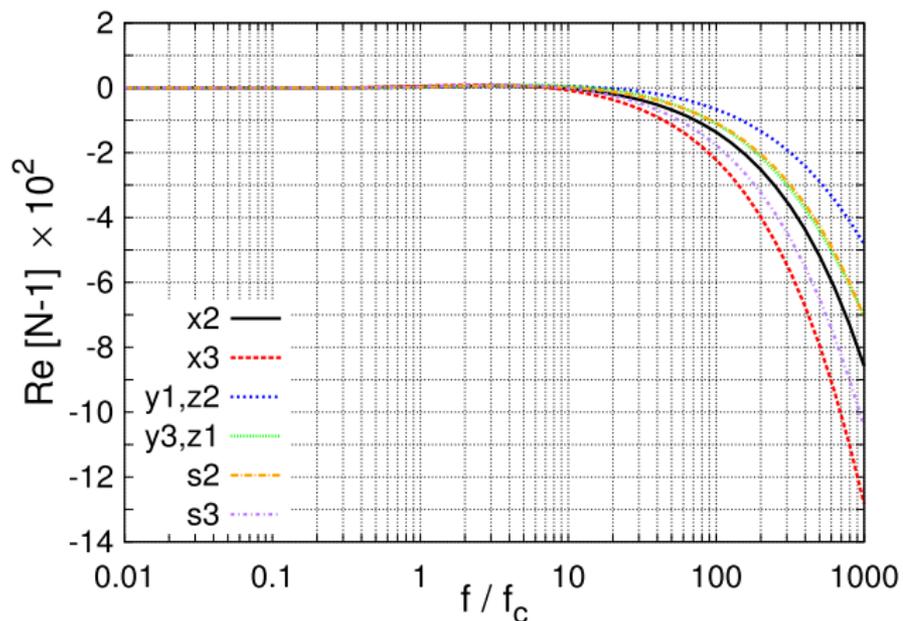
$$\text{Im}[N_{x2}] \simeq \frac{1}{8} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\alpha \epsilon}{\nu} e^{-\frac{4}{3\epsilon\nu}},$$

$$\text{Im}[N_{x3}] \simeq \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\alpha \epsilon}{\nu} e^{-\frac{4}{3\epsilon\nu}},$$

# 外場の強さに対する屈折率の実部

$$0.01 \leq f/f_c \leq 1000$$

$$k_0/m = 1$$



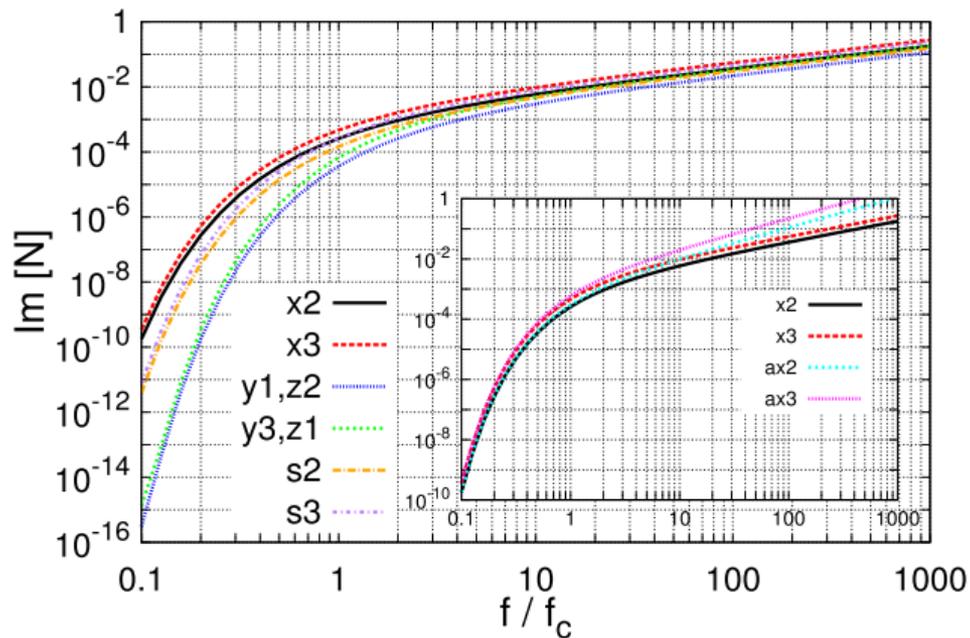
$$N_{x2} \simeq 1 + \frac{2\alpha}{45\pi} \frac{\kappa^2 m^2}{k_0^2},$$

$$N_{x3} \simeq 1 + \frac{7\alpha}{90\pi} \frac{\kappa^2 m^2}{k_0^2},$$

# 外場の強さに対する屈折率の虚部

$$0.01 \leq f/f_c \leq 1000$$

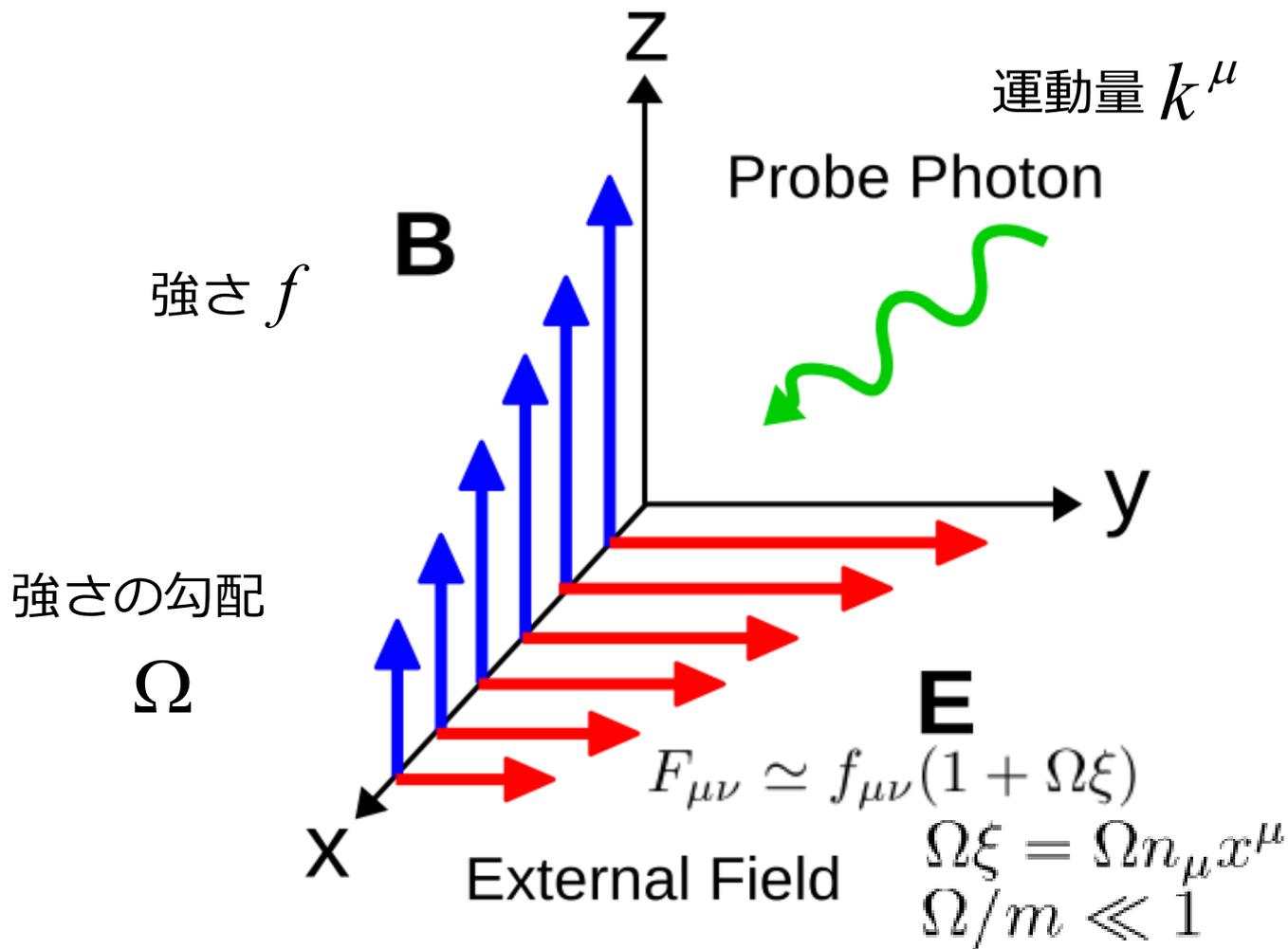
$$k_0/m = 1$$



$$\text{Im}[N_{x2}] \simeq \frac{1}{8} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\alpha \epsilon}{\nu} e^{-\frac{4}{3\epsilon\nu}},$$

$$\text{Im}[N_{x3}] \simeq \frac{1}{4} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\alpha \epsilon}{\nu} e^{-\frac{4}{3\epsilon\nu}},$$

# 結果外場は勾配つきCrossed Field



定量的に評価し、先程の結果とも比較する

# 外場の勾配の依存性

Crossed Fieldでの屈折率 + 勾配による変化

$$N + \delta N$$

$$\delta N = (C_{\text{Re}} + iC_{\text{Im}}) \times \Omega/m + O((\Omega/m)^2)$$

mode	$C_{\text{Re}}$	$C_{\text{Im}}$
x2	$-1.30 \times 10^{-3}$	$3.16 \times 10^{-3}$
x3	$-3.08 \times 10^{-3}$	$5.17 \times 10^{-3}$
y1,z2	$1.42 \times 10^{-4}$	$4.35 \times 10^{-4}$
y3,z1	$1.83 \times 10^{-4}$	$8.28 \times 10^{-4}$
s2	$-3.10 \times 10^{-4}$	$1.79 \times 10^{-3}$
s3	$-9.69 \times 10^{-4}$	$3.11 \times 10^{-3}$

$$k_0/m = 1 \quad f/f_c = 1$$

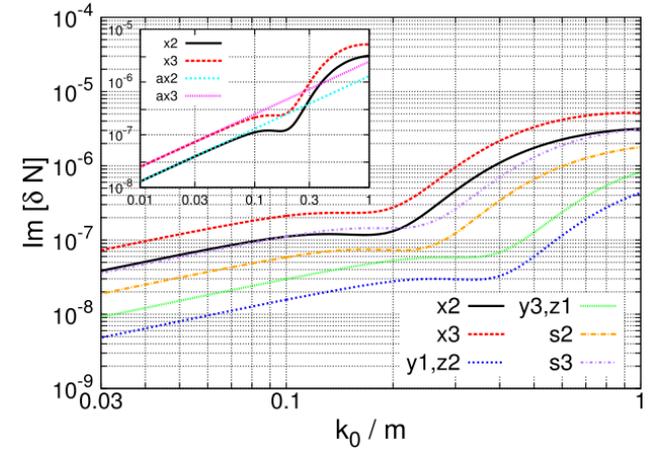
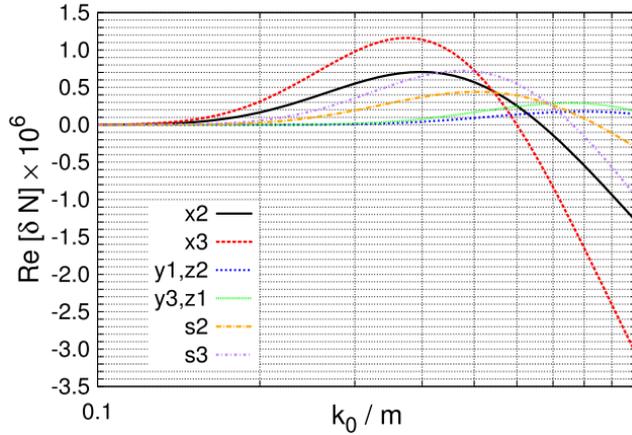
$\delta N$ は勾配に比例、  $|\text{Im}[\delta N]| > |\text{Re}[\delta N]|$

# 外場の勾配を一定 $\Omega/m = 10^{-3}$

実部

虚部

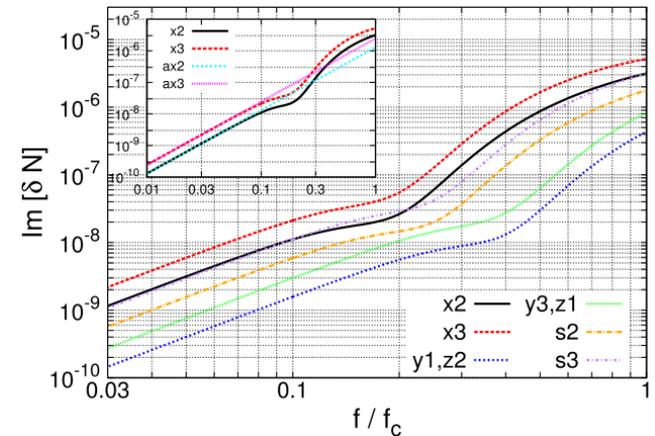
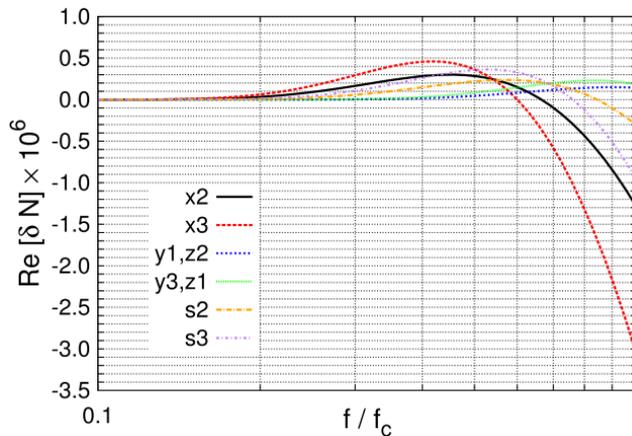
$$f/f_c = 1$$



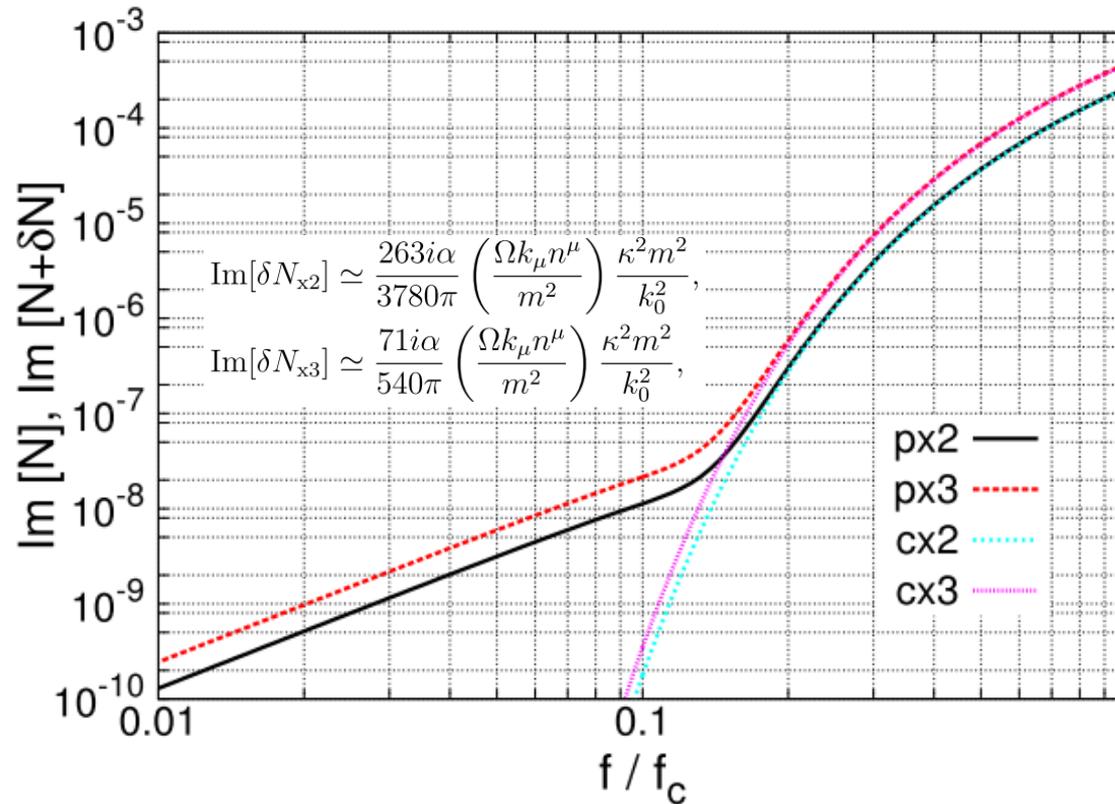
$$\text{Im}[\delta N_{x_2}] \simeq \frac{263i\alpha}{3780\pi} \left( \frac{\Omega k_\mu n^\mu}{m^2} \right) \frac{\kappa^2 m^2}{k_0^2},$$

$$\text{Im}[\delta N_{x_3}] \simeq \frac{71i\alpha}{540\pi} \left( \frac{\Omega k_\mu n^\mu}{m^2} \right) \frac{\kappa^2 m^2}{k_0^2},$$

$$k_0/m = 1$$



# 勾配の有無による屈折率の虚部の変化



$$\Omega/m = 10^{-3}$$

$$k_0/m = 1$$

外場の勾配でべき則の振る舞いをする屈折率の虚部が現れた。

# 小まとめ 1

- 極めて強い電磁場をかけると真空中ですえも量子論的な過程、真空偏極によって屈折率が変化し、複屈折性を示す。
- 本研究では平面電磁波のような垂直な電場と磁場を持つ系を通過するプローブの光子がもつ固有モードとそれに伴う屈折率を求めた。
- 平面電磁波の長波長極限に対応するcrossed fieldでの真空偏極の表式を得て、先行研究の結果を再現し、先行研究では得られていなかったパラメータ領域の屈折率を計算した。平面電磁波を想定した電磁場の変化の屈折率への効果を摂動的に入れ、一次の項を考慮し、真空偏極をはじめて計算した。

我々の開発の手法によってわかったこと

勾配付きcrossed fieldの場合は屈折率の虚部にべきの項が加わる。

# 目次

## 1. 非線形量子電気力学に基づく真空の性質

イントロダクション (レーザー実験による検証とProper-time method)  
相互作用描像に基づくProper-time methodの摂動論  
平面電磁波の長波長極限、crossed field中での屈折率の評価  
平面電磁波の変化を考慮した外場での屈折率の評価

## 2. 非線形量子電気力学に基づくX線偏光観測

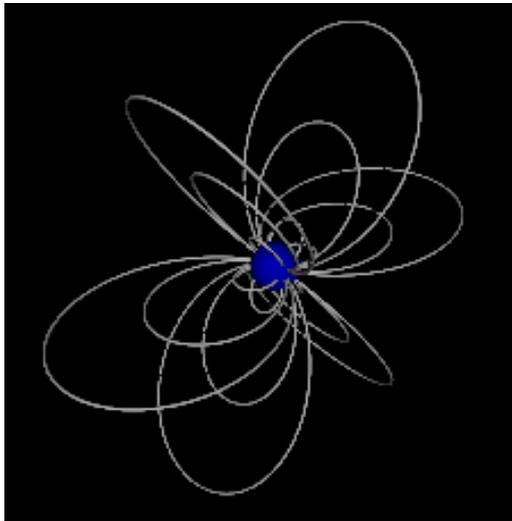
イントロダクション (中性子星からの放射の偏光)  
中性子星周囲の磁気圏における偏光の発展  
非線形QEDとプラズマの誘電性による偏光モードの変換

ここからはcgs-Gauss単位系

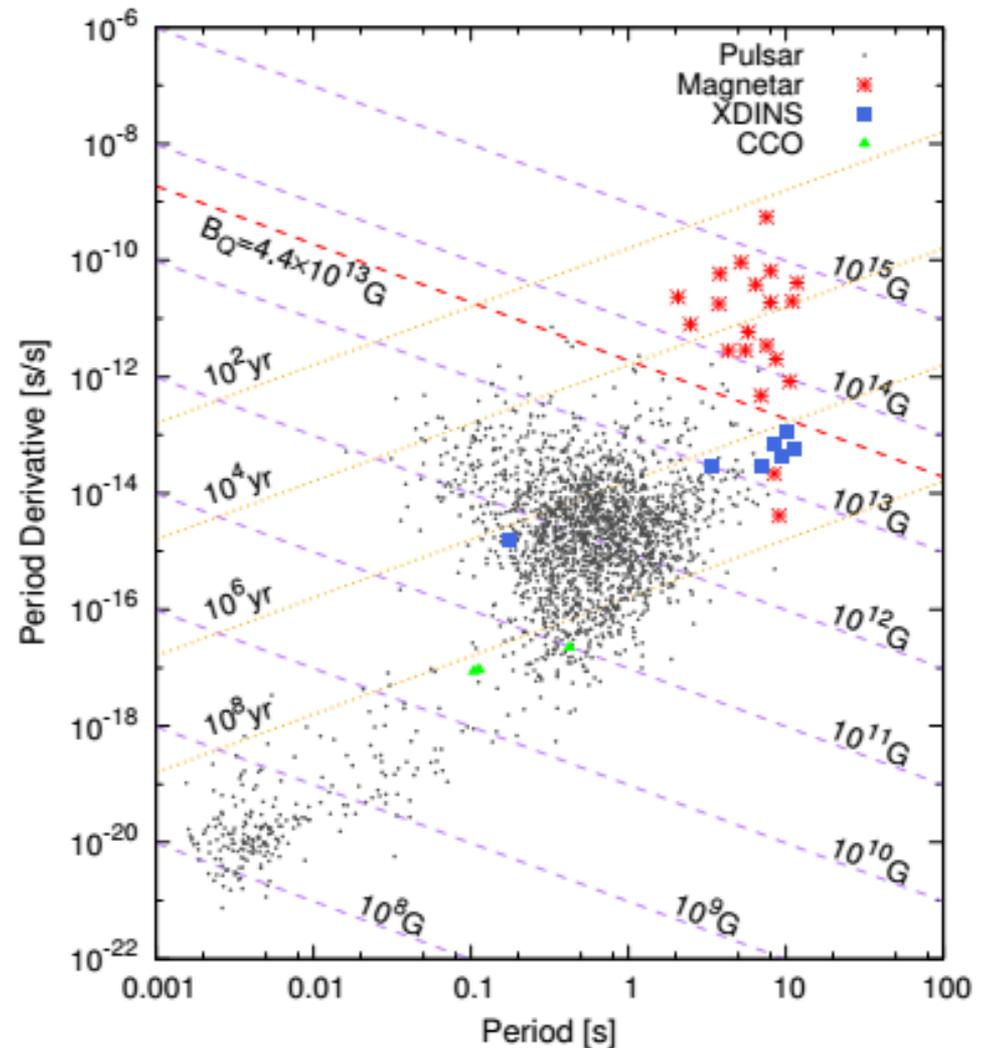
# 中性子星

中性子星には強い双極子磁場が存在すると考えられている。

$$B_p = \left( \frac{3Ic^3 P \dot{P}}{8\pi^2 R^6} \right)^{1/2}$$

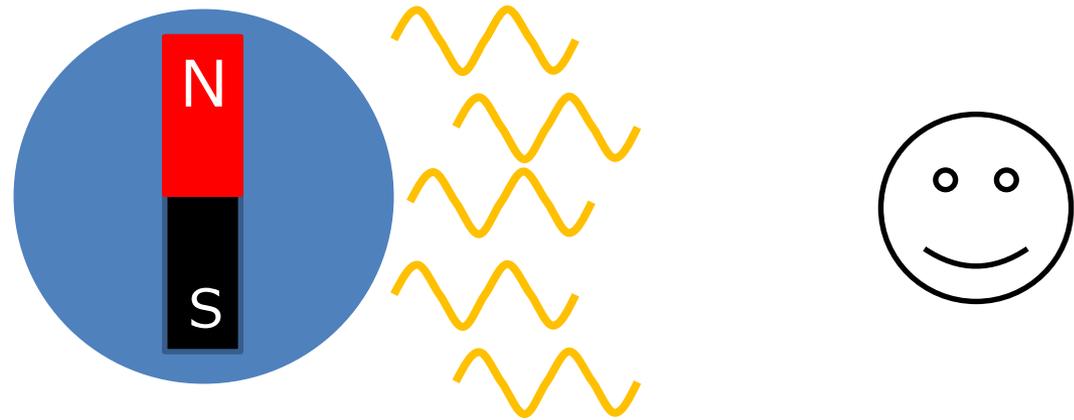


非線形QEDの検証ができる



# 天文観測による中性子星自体の理解

中性子星は強い双極子磁場を持ち、表面からの放射と考えられている熱的放射が観測されている。

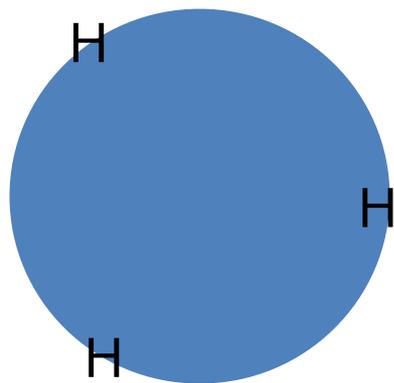


表面からの放射は表面の物理的な性質を反映しているはずなので、天文観測によって中性子星の表面の性質の手がかりを得られるだろう。

# 中性子星表面の様子

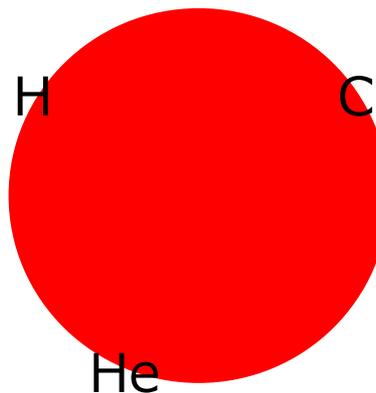
星の表面は星自体や周囲の環境で変わると思われている。質量降着がない孤立した中性子星の場合では複数の状況がある。

水素の大気



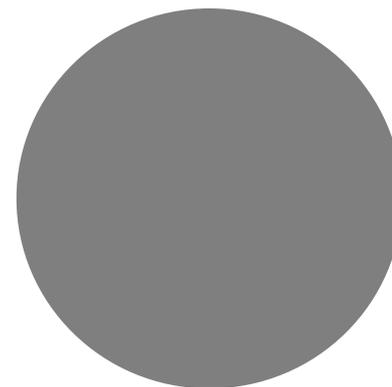
星間空間の水素を降着

水素・ヘリウムetcの大気



降着した水素が高温の表面で燃焼

大気がない  
Condensed Surface



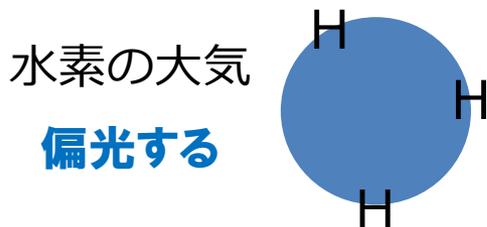
強磁場、低温の表面

Review: A. Y. Potekhin, Physics-Uspekhi 57 (2014) 735.

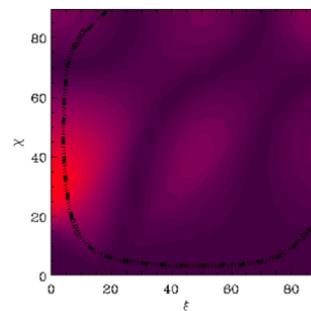
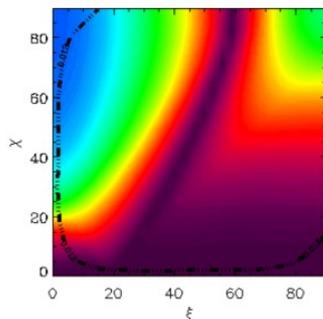
# RX J1856.5-3754の偏光予想

XDINSと呼ばれる種類の中性子星の一つであるこの天体では、大気を持つ可能性と持たない可能性がある。その偏光を予想する理論研究が行われた。

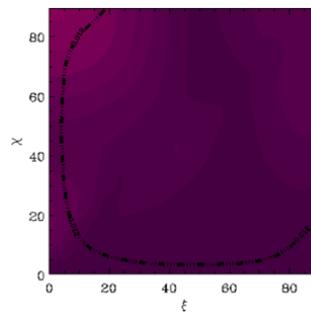
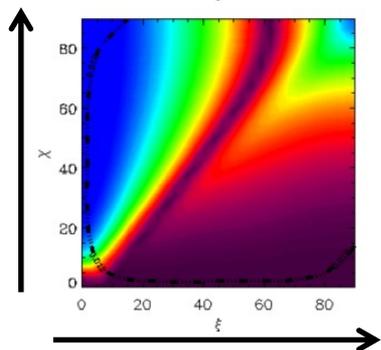
偏光度  
(位相平均)



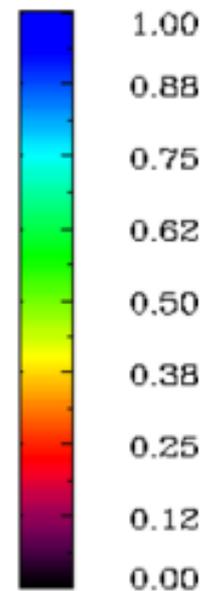
可視光  
(2.5-3.1eV)



軟X線  
(0.12-0.39keV)



強い偏光



無偏光

姿勢のパラメータ

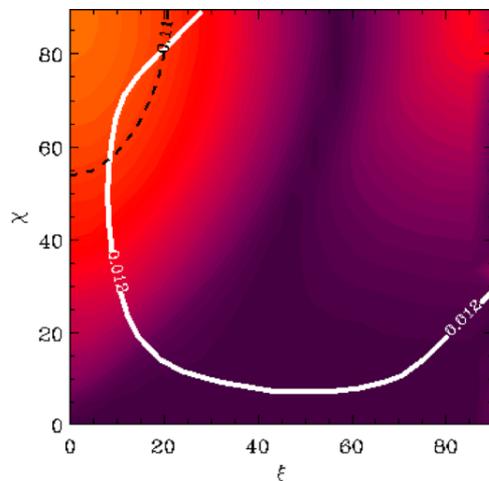
D. González Caniulef et al. MNRAS 459 (2016) 3585

# RX J1856.5-3754の偏光観測(可視光)

R. P. Mignani et al. MNRAS 465 (2017) 492

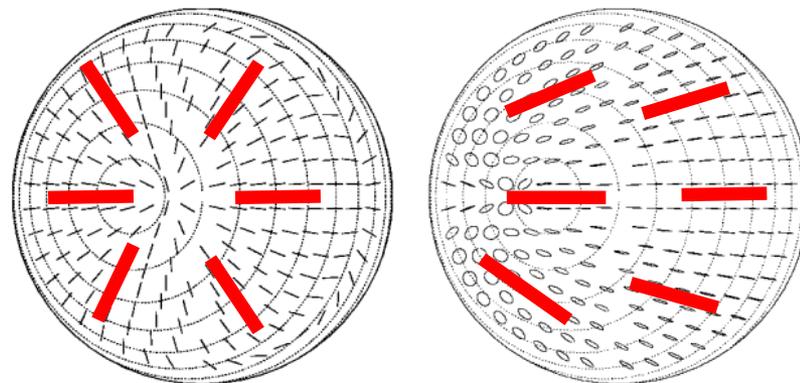
可視光での位相平均をとった偏光度は $16.43 \pm 5.26\%$   
大気存在の決着はつかず、軟X線での偏光観測に持ち越し

しかし、16%の偏光度は強い磁場によるQED効果の一つである真空複屈折の効果を示唆する。



真空複屈折を考慮しないと、大気がある場合でも偏光度は低い。

R. P. Mignani et al. MNRAS 465 (2017) 492



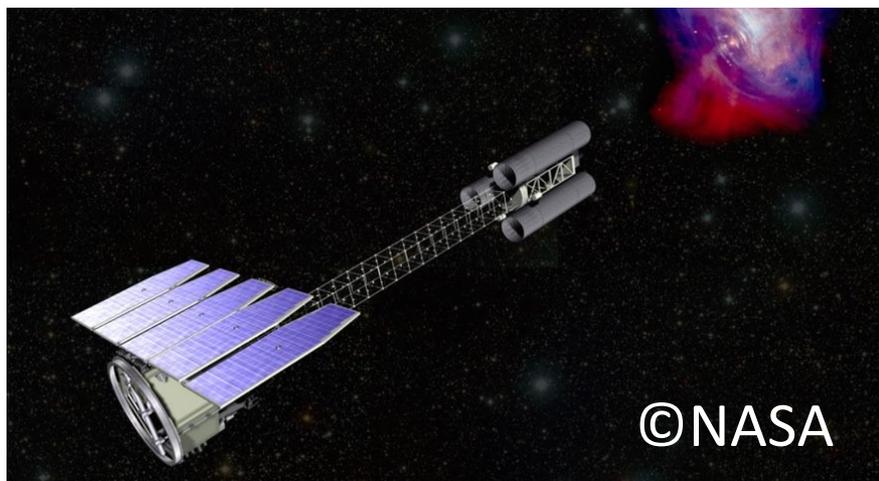
左：磁気圏のQED効果がないときは偏光の向きはバラバラ

右：磁気圏のQED効果があるときは偏光の向きはそろっている

J. S. Heyl, N. J. Shaviv, PRD 66, (2002) 023002

# 近い将来の軟X線の偏光観測

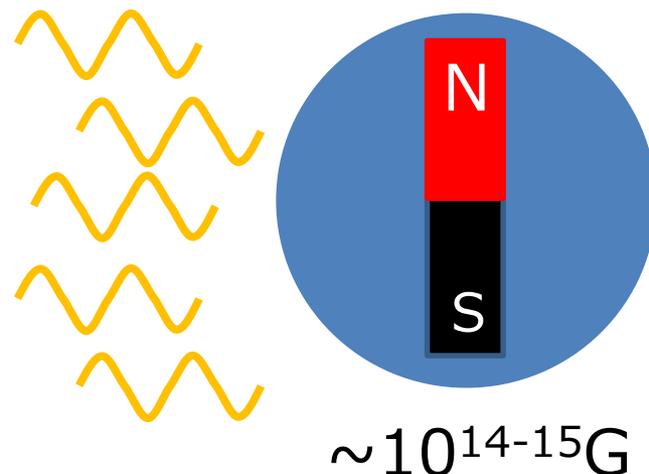
軟X線偏光観測衛星IXPE



Weisskopf et al. (2013)

観測エネルギーは2-8keV  
他にも計画(eXTP)がある

マグネターはX線を放射する。



S. Mereghetti *Astron. Astrophys. Rev.*,  
15 (2008) 225

強い磁場により偏光に影響が見られる

本研究では非線形QEDを反映したマグネターの偏光を系統的に予想する

# 偏光を予想するためには

## 表面放射の性質

熱的な成分の偏光モードは大気で決まる

## 磁気圏での発展

偏光は磁気圏中で向きを変える

大気

中性子星

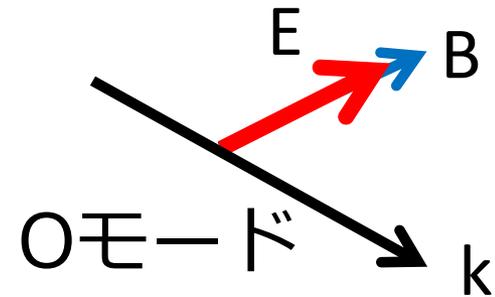
~10km       $\lesssim 10\text{cm}$

磁気圏

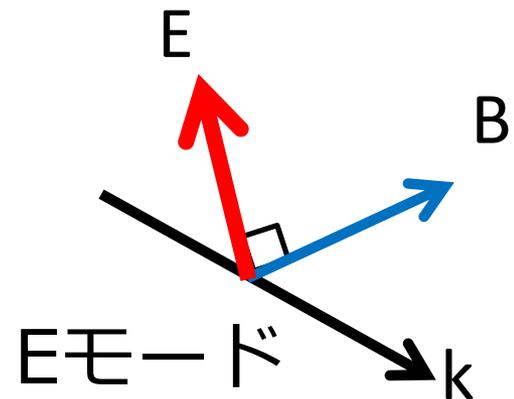
# 磁場中の真空での偏光モード

## 電磁波の固有モード

Oモード  $E_0 // k-B$  平面  
Ordinary mode



Eモード  $E_E \perp k-B$  平面  
Extraordinary mode  
Xモードということもある



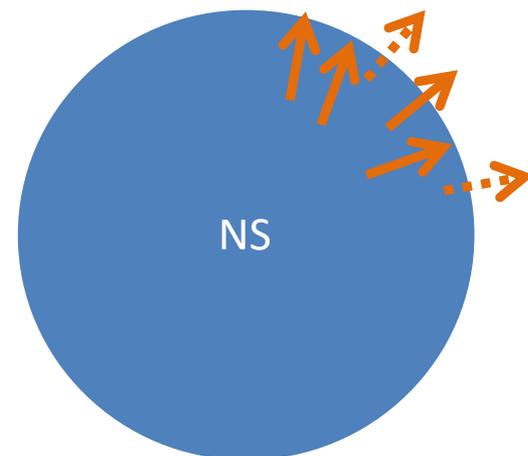
# 偏光した表面放射

## オパシティーは電磁波の偏光に依存する

大気は電離した水素などのプラズマからなるとすると、中性子星のような強い磁場のもとではEモードのオパシティーはOモードのものよりも小さくなる。

$$\kappa_e \sim (E/E_{Be})^2 \kappa_o$$

そのため、Eモードの電磁波は大気の内側の温度が高い部分からも放射されるので、Eモードの電磁波はOモードの電磁波よりも多く放射される。



- Eモード電磁波
- Oモード電磁波

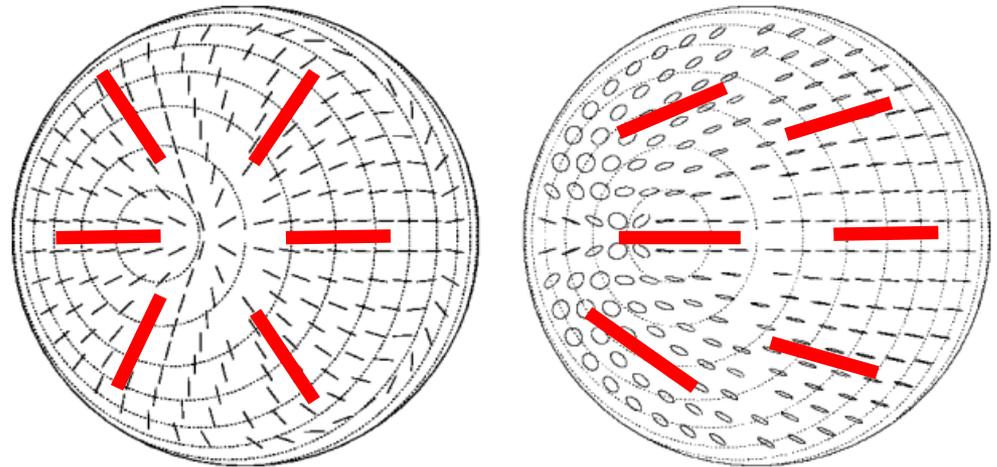
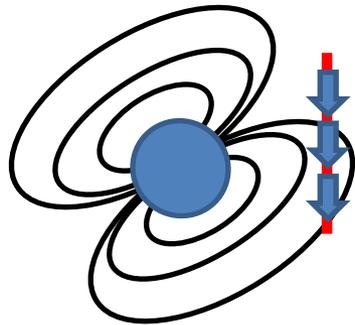
G. G. Pavlov, V. E. Zavlin,  
ApJ 529 (2000) 1011

⇒大気からの熱的放射は偏光している

# 磁気圏における偏光の発展を解く

大気から放射された電磁波はさらに磁気圏の影響を受ける

大気から放射された電磁波はさらに磁気圏の影響を受ける。星表面の近くでは偏光に対して磁場の影響が強く、また磁場の変化は偏光の変化に対してゆっくりとしているので、断熱的に偏光が変化する。



左：磁気圏のQED効果がないときは偏光の向きはバラバラ

右：磁気圏のQED効果があるときは偏光の向きはそろっている

J. S. Heyl, N. J. Shaviv,  
PRD 66, (2002) 023002

⇒外部の磁場構造を反映し、双極子磁場の場合はより偏光する

効率よく解きたい場合は偏光の変化に関する距離のスケールと磁場の変化の距離のスケールを比較すると便利である。

偏光の発展を表す方程式  
(Z方向に進む偏光のベクトル $A_X, A_Y$ の発展)

$$\frac{d}{dZ} \begin{pmatrix} A_X \\ A_Y \end{pmatrix} = \frac{ik_0\delta}{2} \begin{pmatrix} M & P \\ P & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_X \\ A_Y \end{pmatrix} \quad l_A = 2/k_0\delta$$

双極子磁場の変化のスケール

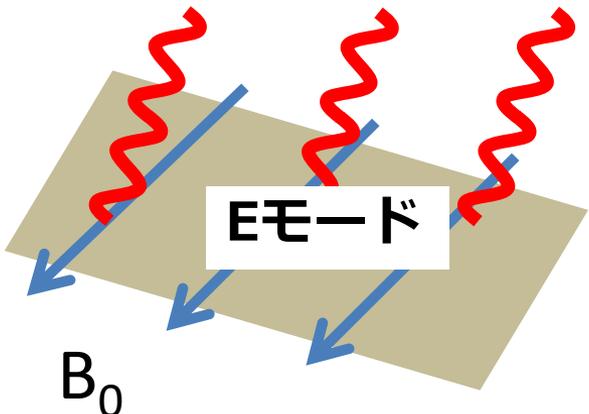
$$l_B = |\mathbf{B}||\mathbf{k}|/|\mathbf{k}\cdot\nabla\mathbf{B}| \sim r.$$

$l_A=l_B$ となる半径をpolarization-limiting radiusといい、そこでの磁場の向きが偏光を決定すると仮定する

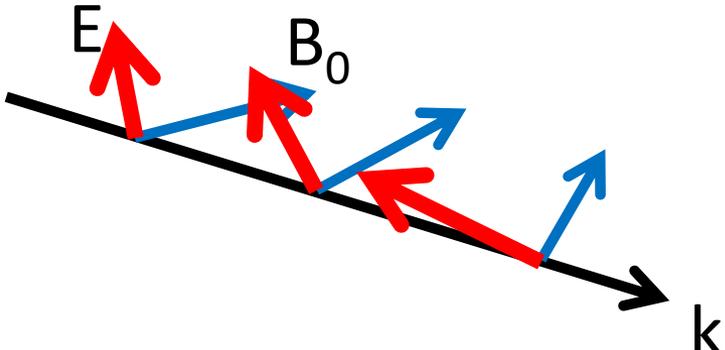
$$\frac{r_{pl}}{R_{NS}} \simeq 74 \left( \frac{B_p}{10^{14}\text{G}} \right)^{2/5} \left( \frac{E}{1\text{keV}} \right)^{1/5} \left( \frac{R_{NS}}{10\text{km}} \right)^{1/5}$$

# 先行研究 (Taverna et al. 2015)では

表面放射は同じ方向に偏光している  $\kappa_e \sim (E/E_{Be})^2 \kappa_o$



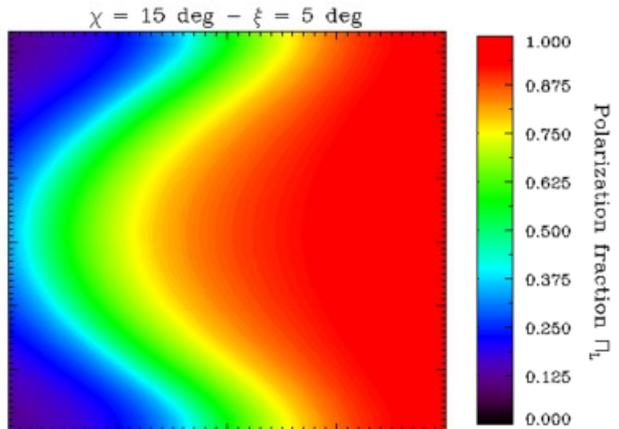
偏光は磁場に従って断熱的に変化する  
偏光の向きは中性子星から離れた位置  
(=polarization-limiting radius)の磁場で決まる



大気

磁気圏

中性子星



Taverna et al. (2015)

# 設定

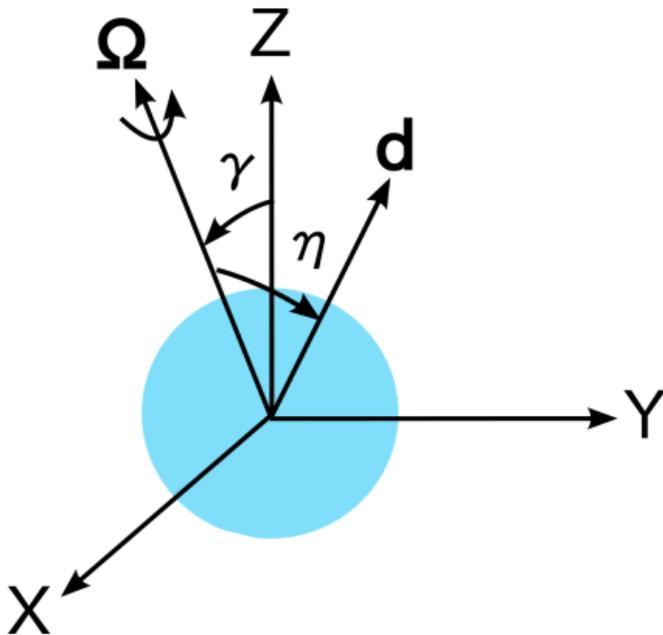
Observer



- 表面放射はすべてE-modeである。
- 偏光はpolarization-limiting radiusで決まる。
- 偏光度  $\Pi_L$  と偏光角  $\chi_p$  を求める

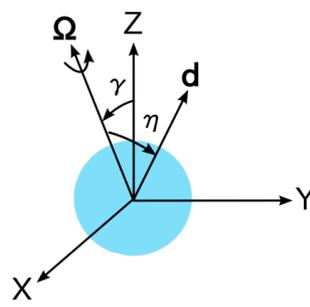
$$\Pi_L = \frac{\sqrt{Q^2 + U^2}}{I}, \quad \chi_p = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{U}{Q} \right).$$

I,Q,U: Stokes parameter

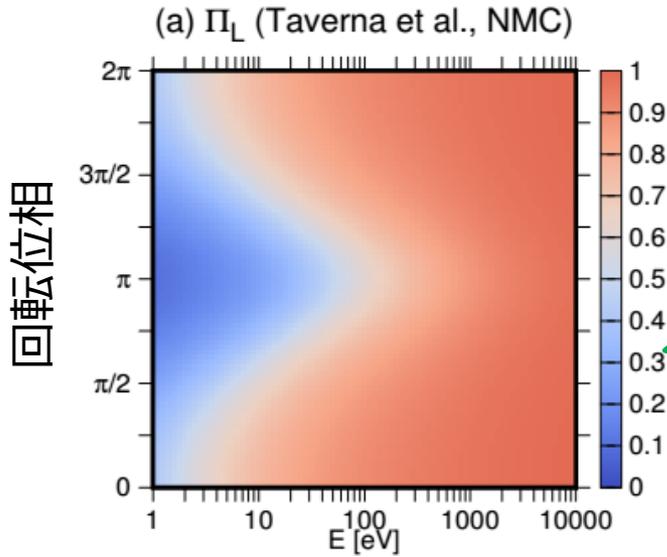


- 観測者はZ軸方向の無限遠にいる
- ダイポール磁場
- 放射はZ軸方向に伝播する
- 一般相対性理論の効果は考えない

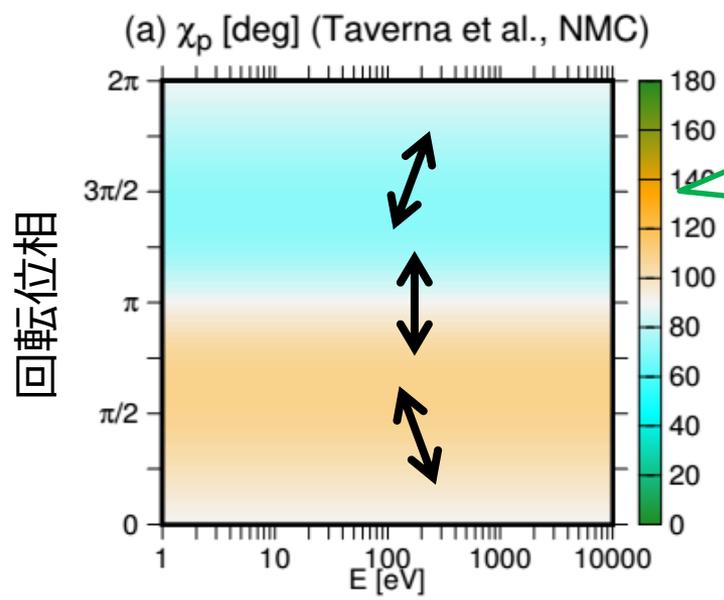
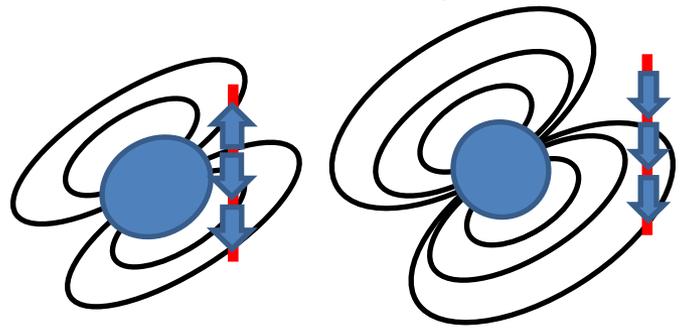
# 大まかな理解



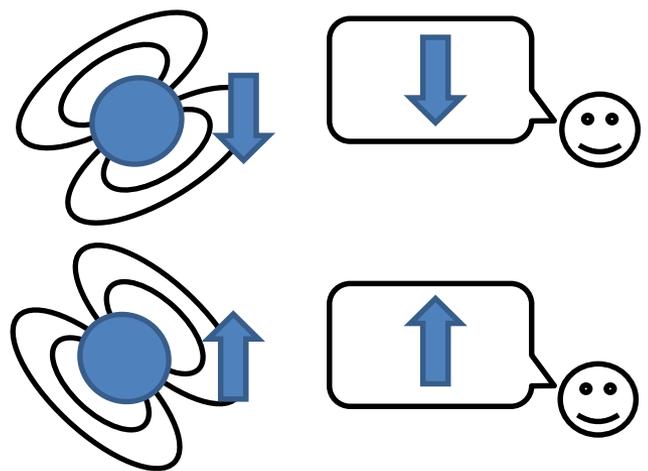
$\gamma=15^\circ, \eta=5^\circ, B=10^{13}G$   
 (Same as Taverna+ (2015))



偏光度はエネルギーが高い光子ほど高くなりやすい

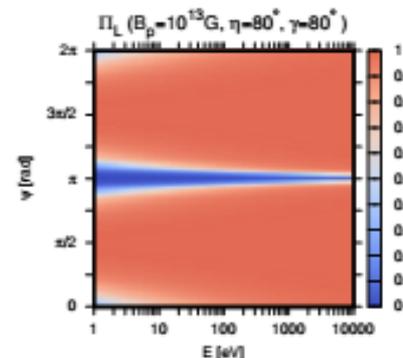
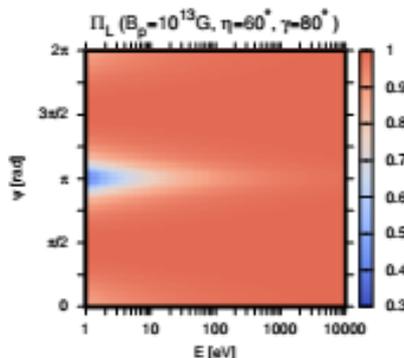
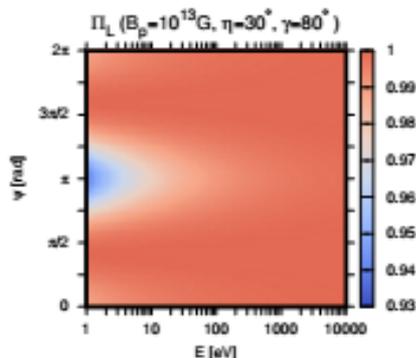


偏光角は自転とともに変化する

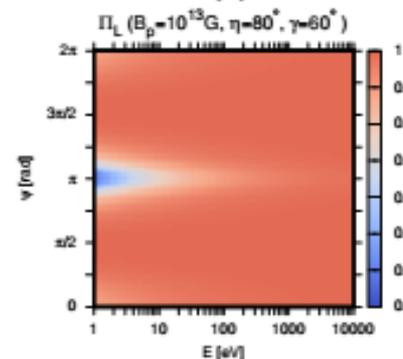
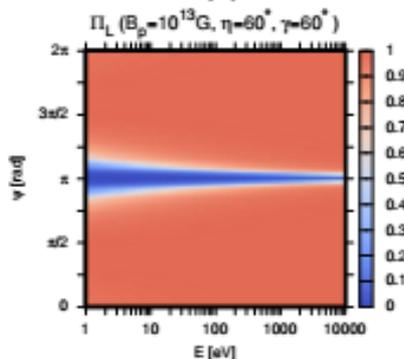
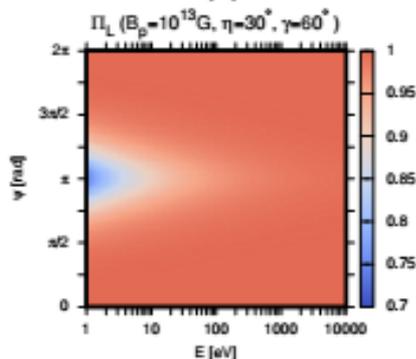


# 偏光度 ( $B=10^{13}\text{G}$ )

$\gamma=80^\circ$

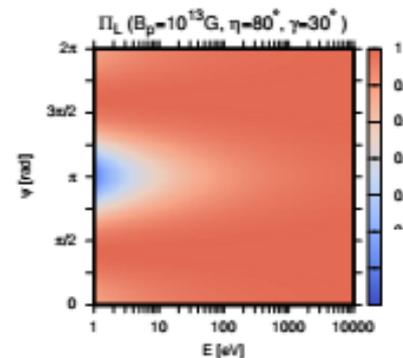
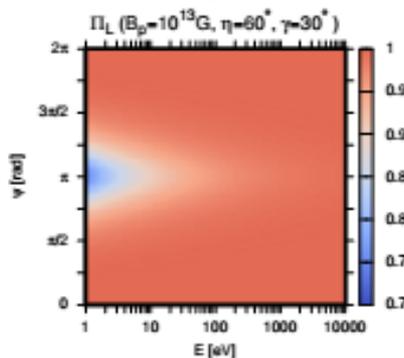
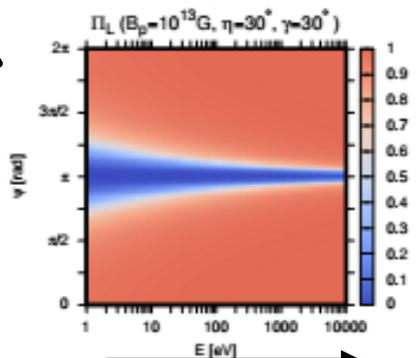


$\gamma=60^\circ$



$\gamma=30^\circ$

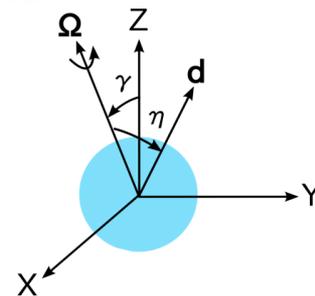
回転位相 ↑



エネルギー  
 $\eta=30^\circ$

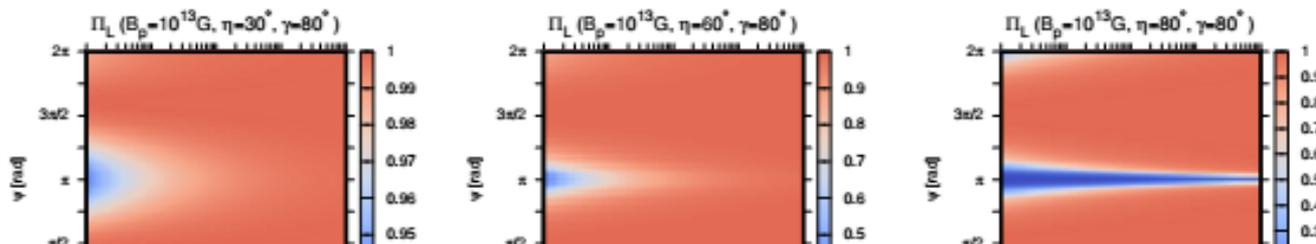
$\eta=60^\circ$

$\eta=80^\circ$



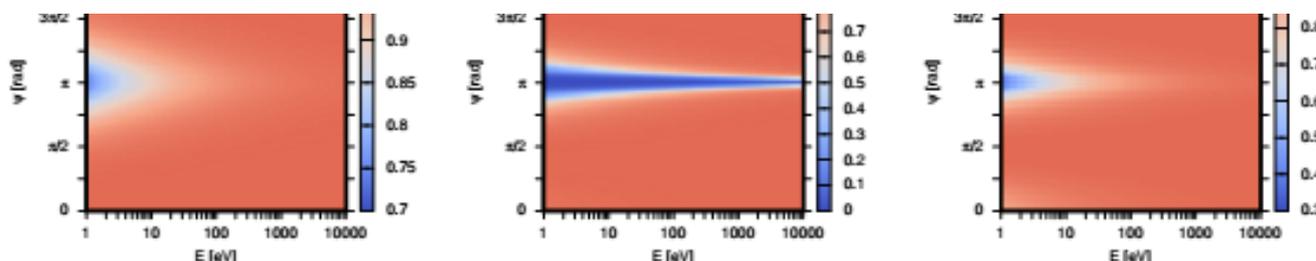
# 偏光度 ( $B=10^{13}\text{G}$ )

$\gamma=80^\circ$



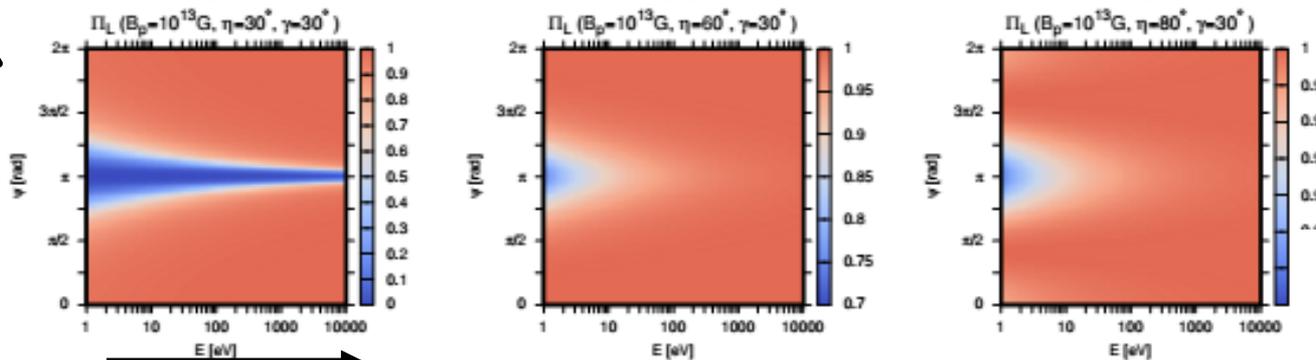
1-10keVにおいて偏光度はほとんどの場合でほぼ1になる。

$\gamma=60^\circ$



$\gamma=30^\circ$

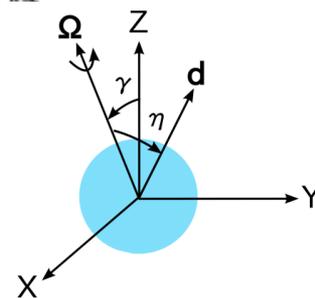
回転位相 ↑



エネルギー  
 $\eta=30^\circ$

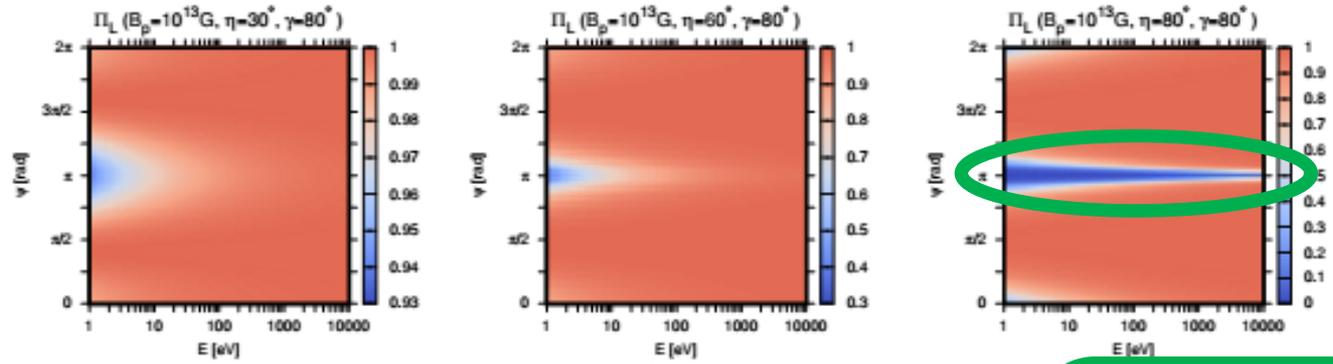
$\eta=60^\circ$

$\eta=80^\circ$

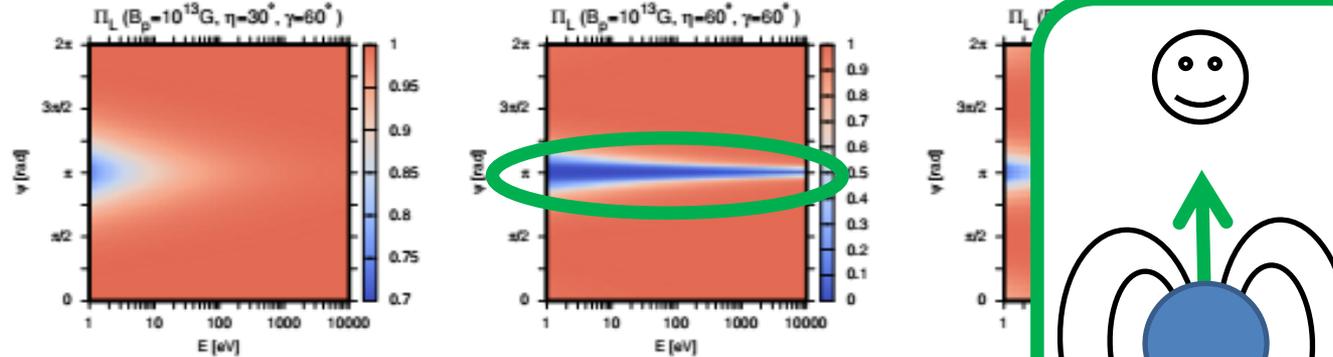


# 偏光度 ( $B=10^{13}\text{G}$ )

$\gamma=80^\circ$

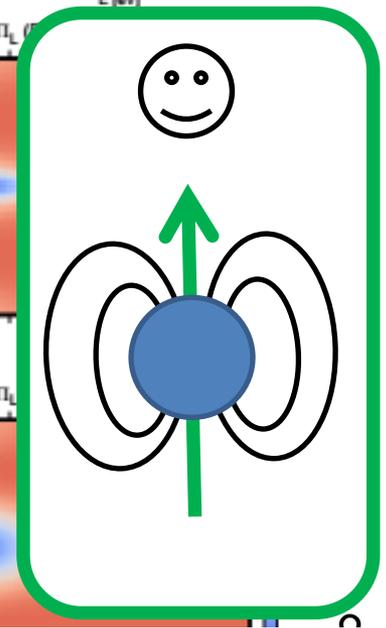
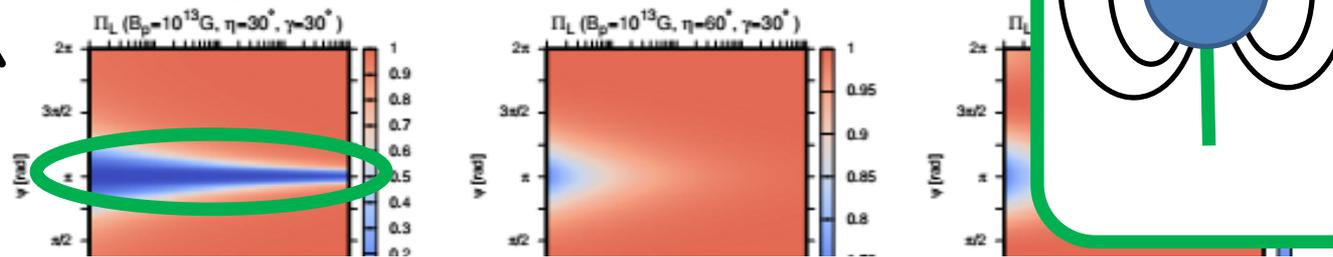


$\gamma=60^\circ$



$\gamma=30^\circ$

↑  
回転位相



ただし、磁軸が視線方向に向くとダイポール磁場の対称性から偏光度がゼロになる。

$\Pi_{\perp} = 0$

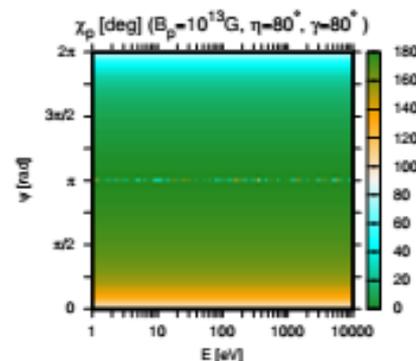
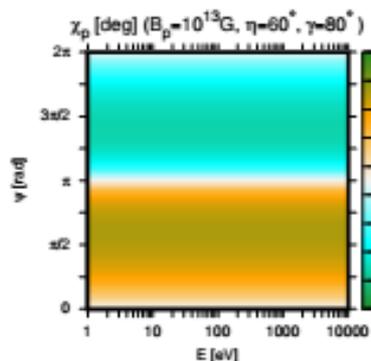
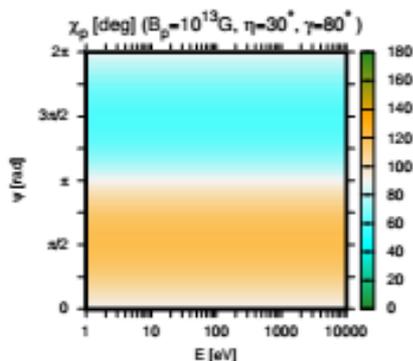
$\Pi_{\perp} = 0$

$\Pi_{\perp} = 0$

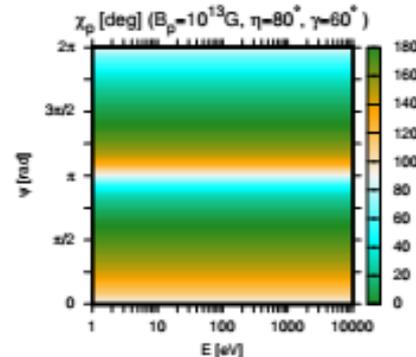
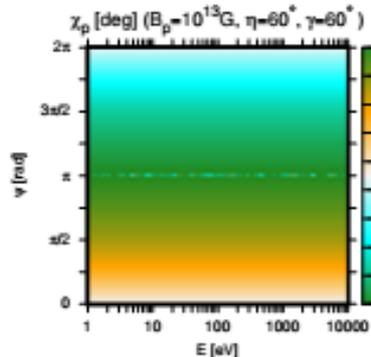
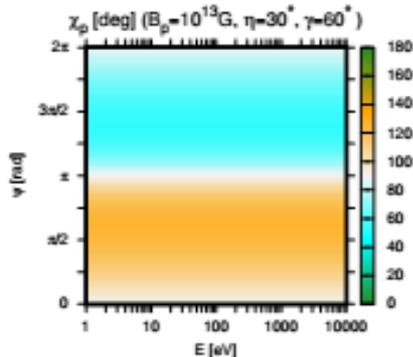


# 偏光角( $B=10^{13}\text{G}$ )

$\gamma=80^\circ$

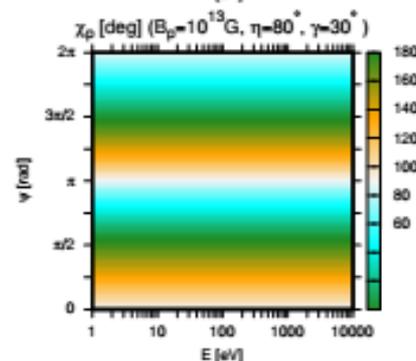
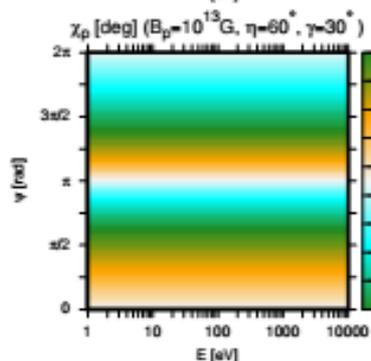
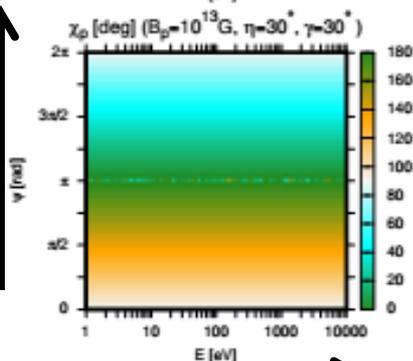


$\gamma=60^\circ$



$\gamma=30^\circ$

回転位相  
↑

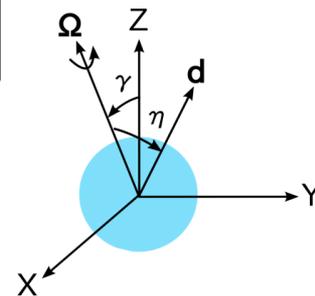


エネルギー  
→

$\eta=30^\circ$

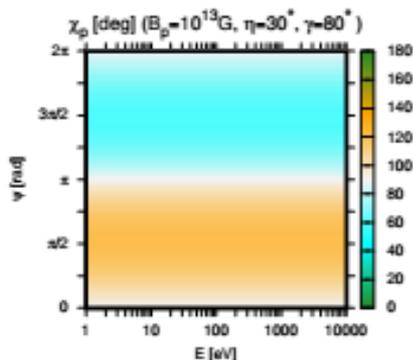
$\eta=60^\circ$

$\eta=80^\circ$

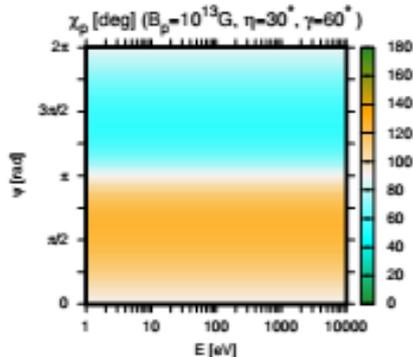


# 偏光角( $B=10^{13}\text{G}$ )

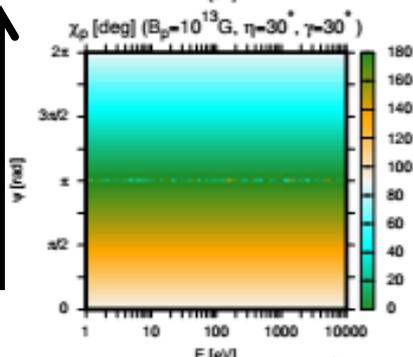
$\gamma=80^\circ$



$\gamma=60^\circ$



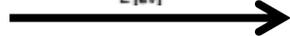
$\gamma=30^\circ$



回転位相

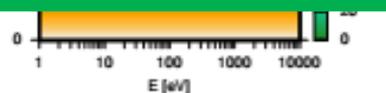
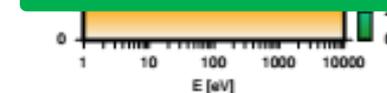
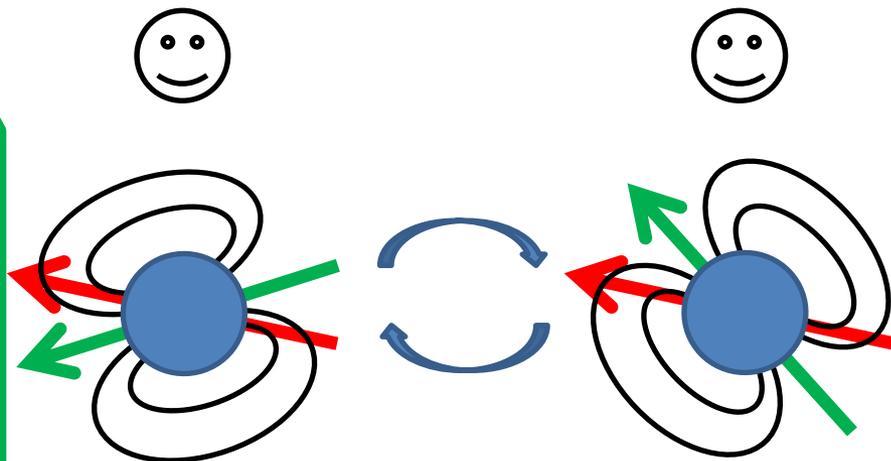


エネルギー



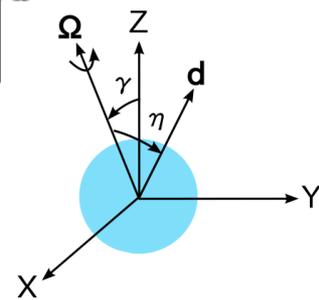
$\eta=30^\circ$

$\gamma=80^\circ, \eta=30^\circ$



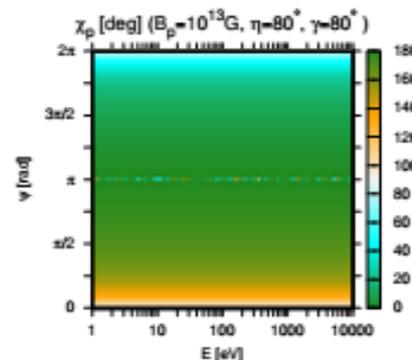
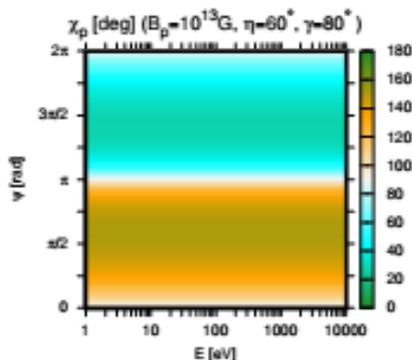
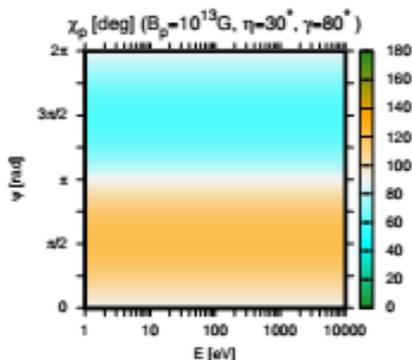
$\eta=60^\circ$

$\eta=80^\circ$

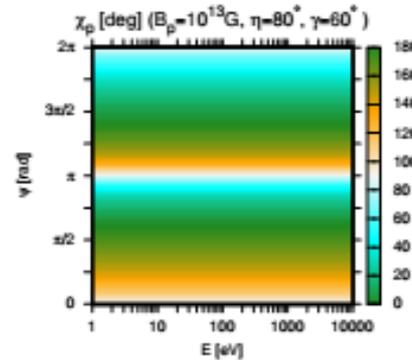
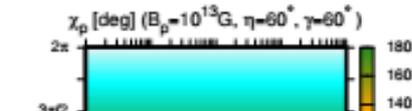
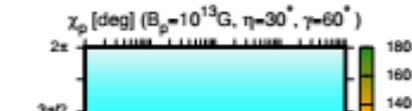


# 偏光角( $B=10^{13}\text{G}$ )

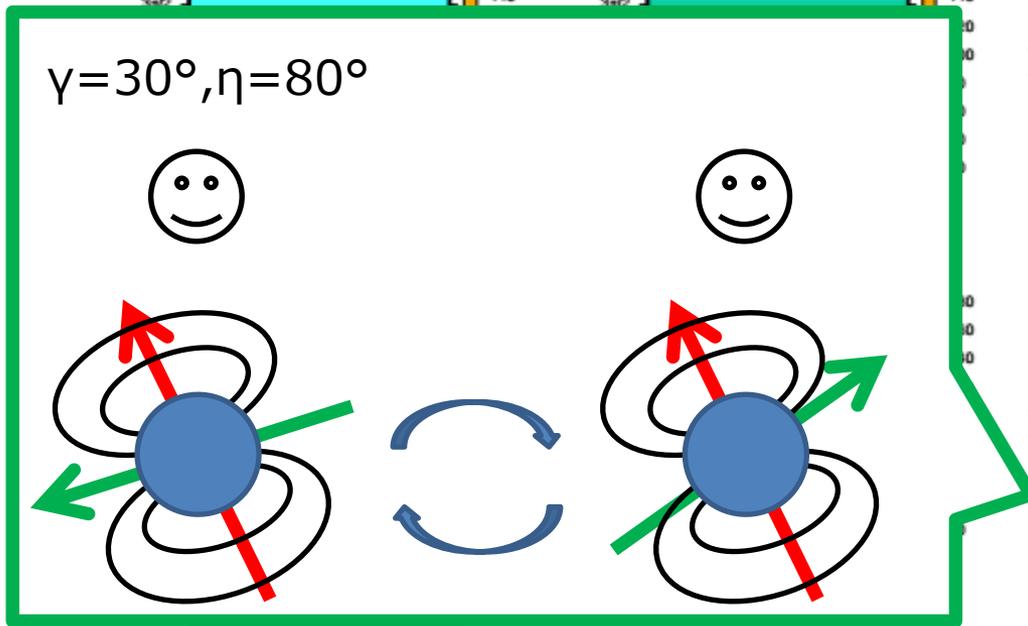
$\gamma=80^\circ$



$\gamma=60^\circ$



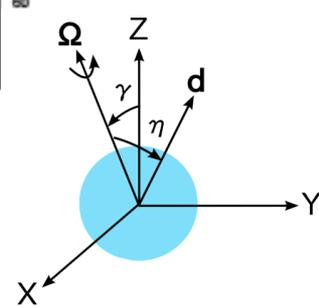
$\gamma=30^\circ$



エネルギー  
 $\eta=30^\circ$

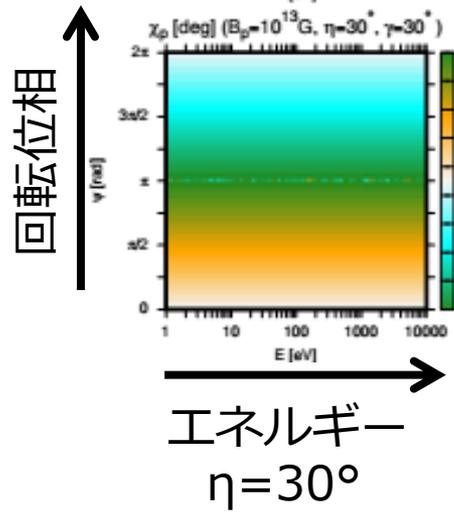
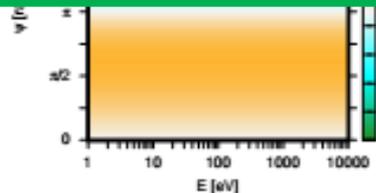
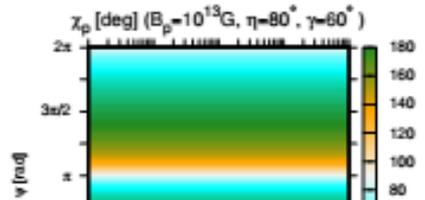
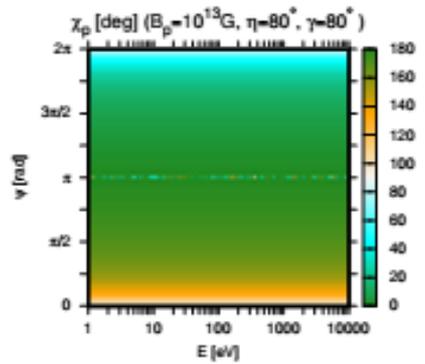
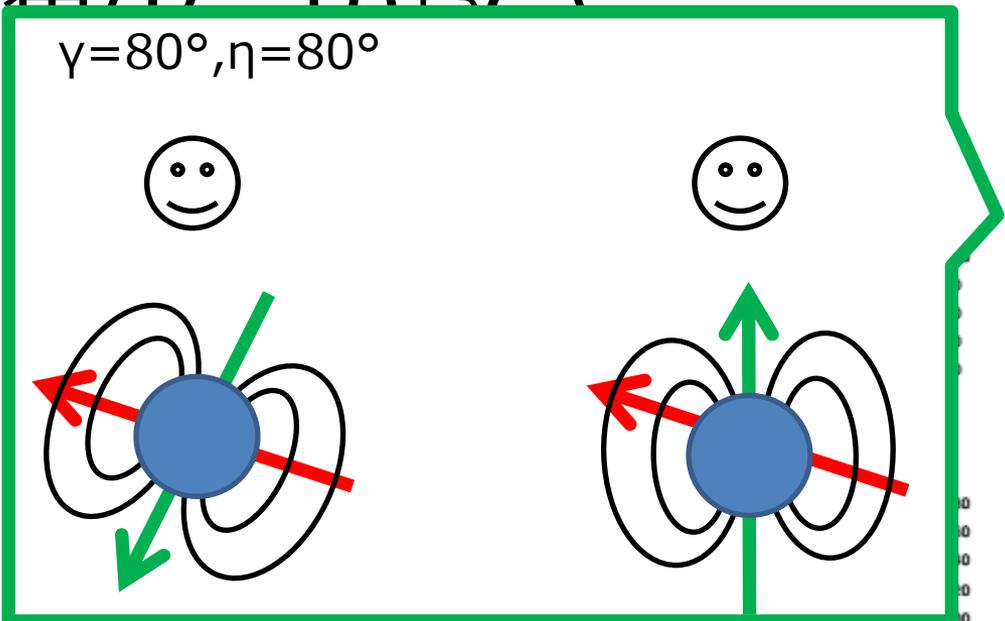
$\eta=60^\circ$

$\eta=80^\circ$

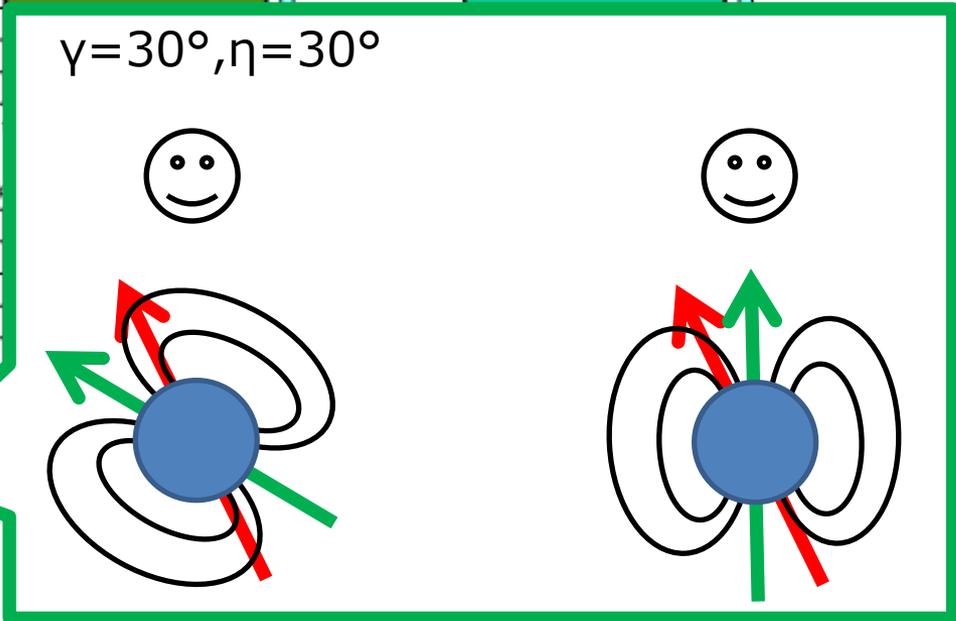


# 偏光角 ( $B_p = 1.013 G$ )

$\gamma = 80^\circ, \eta = 80^\circ$



$\gamma = 30^\circ, \eta = 30^\circ$



$\gamma = 80^\circ$

$\gamma = 60^\circ$

$\gamma = 30^\circ$

エネルギー

$\eta = 30^\circ$

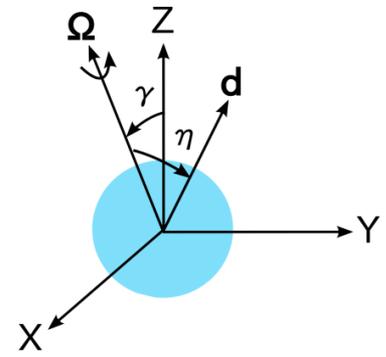
$\eta = 60^\circ$

$\eta = 80^\circ$

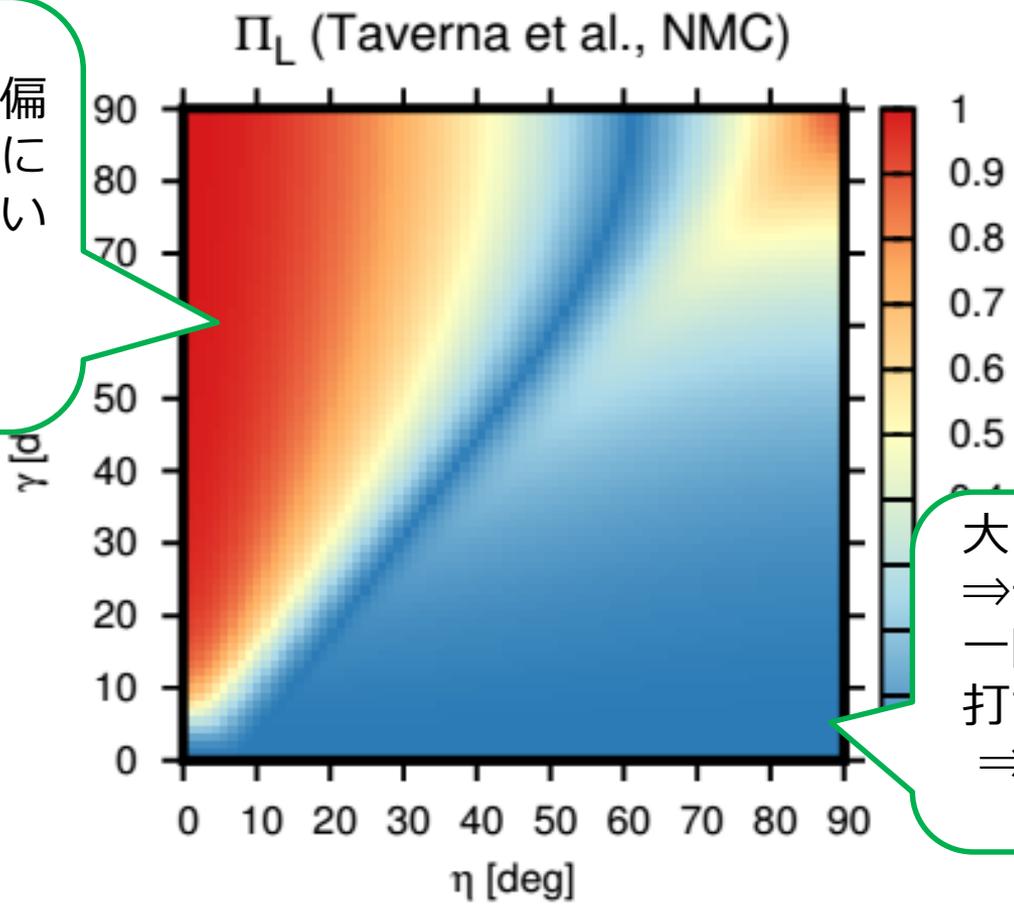


# 位相平均をとった偏光度

$B=10^{13}\text{G}, E=5\text{keV}$



大きな  $\gamma$   
⇒ 磁場の向きと偏光の向きは回転に通してそろっている  
⇒ 高い  $\Pi_L$

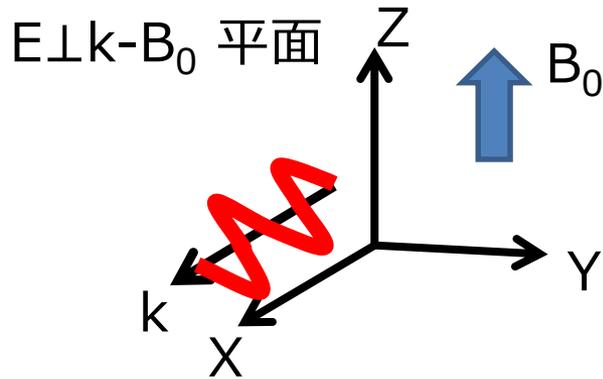


大きな  $\eta$   
⇒ 一周で磁場が一回転し、偏光が打ち消しあう。  
⇒ 低い  $\Pi_L$

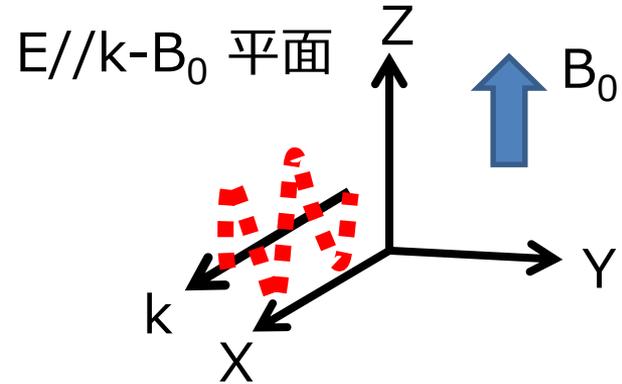
# モード変換

## 磁場中のプラズマにおける偏光モード

Extraordinary(E)-モード



Ordinary(O)-モード



プラズマと真空偏極(QED過程の一つ)の効果の兼ね合いでモードが変換する

プラズマ効果：大

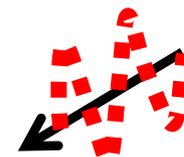
例えば



Eモード



QED効果：大



Oモード

# 磁場の下にあるプラズマ中の電磁波

P. Mészáros (1992) *High-energy radiation from magnetized neutron stars*

電磁波の偏光の方程式

$$\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -c^2 [\nabla \times \mu^{-1} (\nabla \times \mathbf{E})]$$

誘電テンソル、透磁率テンソルの逆(磁場はz方向に平行の場合)

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + \Delta\varepsilon_{ij}^{(v)} + \Delta\varepsilon_{ij}^{(p)} \quad \mu_{ij}^{-1} = \delta_{ij} + \Delta\mu_{ij}^{-1(v)}$$

$$\Delta\varepsilon_{ij}^{(v)} = \begin{pmatrix} -2\delta & 0 & 0 \\ 0 & -2\delta & 0 \\ 0 & 0 & 5\delta \end{pmatrix}_{ij} \quad \Delta\varepsilon_{ij}^{(p)} = \begin{pmatrix} S & iD & 0 \\ -iD & S & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix}_{ij} \quad \Delta\mu_{ij}^{-1(v)} = \begin{pmatrix} -2\delta & 0 & 0 \\ 0 & -2\delta & 0 \\ 0 & 0 & -6\delta \end{pmatrix}_{ij}$$

$$\delta = \frac{\alpha}{45\pi} \left( \frac{B}{B_Q} \right)^2 \simeq 5 \times 10^{-5} \left( \frac{B}{B_Q} \right)$$

$$S = -\frac{v}{1-u}, \quad D = -\frac{vu^{1/2}}{1-u}, \quad P = -v, \quad \hbar\omega_{ce} = \frac{\hbar e B}{m_e c} = 11.6 \left( \frac{B}{10^{12} \text{G}} \right) \text{keV}$$

$$v = \left( \frac{\omega_{pe}}{\omega} \right)^2, \quad u = \left( \frac{\omega_{ce}}{\omega} \right)^2, \quad u^{1/2} = \frac{\omega_{ce}}{\omega}. \quad \omega_{pe} = \left( \frac{4\pi n_e e^2}{m_e} \right)^{1/2}$$

# z軸方向に進む電磁波の固有モード

平面波に対する方程式を書き下し、整理するとプラズマの存在によって現れる縦波成分は横波成分で表される。

$$E_z = -\epsilon_{zz}^{-1}(\epsilon_{zx}E_x + \epsilon_{zy}E_y)$$

それにより、横波成分だけで方程式は書ける。

$$\begin{pmatrix} \eta_{xx} - N^2 & \eta_{xy} \\ \eta_{yx} & \eta_{yy} - N^2\rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = 0$$

$$\eta_{xx} = (1 - 2\delta)^{-1}(S \sin^2 \theta + P \cos^2 \theta)^{-1}SP,$$

$$\eta_{yy} = (1 - 2\delta)^{-1}(S \sin^2 \theta + P \cos^2 \theta)^{-1} \{SP \cos^2 \theta + (S^2 - D^2) \sin^2 \theta\},$$

$$\eta_{xy} = -\eta_{yx} = (1 - 2\delta)^{-1}(S \sin^2 \theta + P \cos^2 \theta)^{-1}iDP \cos \theta,$$

$$\rho = 1 - 4\delta(1 - 2\delta)^{-1} \sin^2 \theta$$

# 固有モードの屈折率

横波成分に関する方程式の係数行列の行列式がゼロ

$$\det \begin{pmatrix} \eta_{xx} - N^2 & \eta_{xy} \\ \eta_{yx} & \eta_{yy} - N^2 \rho \end{pmatrix} = 0$$

となるようなNは屈折率で

$$\begin{aligned} N_{1,2}^2 &= \frac{1}{2}(\eta_{xx} + \rho^{-1}\eta_{yy}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\eta_{xx} - \rho^{-1}\eta_{yy})^2 + 4\rho^{-1}|\eta_{xy}|^2} \\ &= \{2(1 - 2\delta)(S \sin^2 \theta + P \cos^2 \theta)\}^{-1} \\ &\quad \times \left[ SP + \rho^{-1}(SP \cos^2 \theta + (S^2 - D^2) \sin^2 \theta) \right. \\ &\quad \left. \pm \sqrt{\{SP - \rho^{-1}(SP \cos^2 \theta + (S^2 - P^2) \sin^2 \theta)\}^2 + 4\rho^{-1}D^2 P^2 \cos^2 \theta} \right] \end{aligned}$$

が求められる。

# 固有モードのベクトル

屈折率が求められると固有モードも求められる。

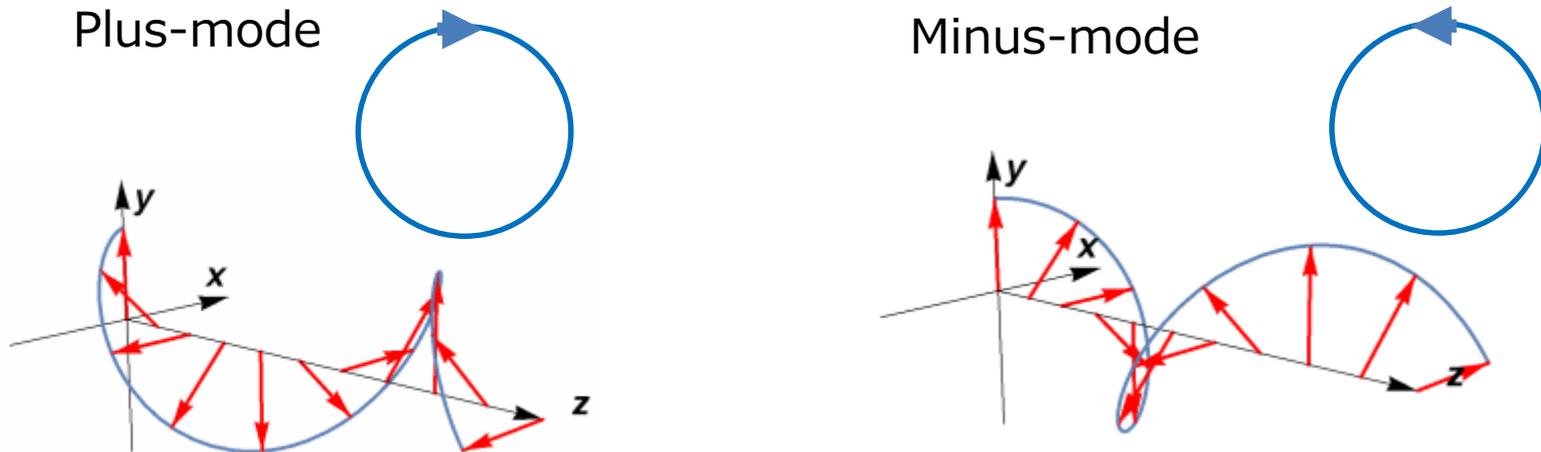
$$\mathbf{e}_{1,2}^t = C(i\alpha_{x_{1,2}}, 1)$$

楕円パラメータ

$$\alpha_x = \rho^{1/2} b [1 \pm (1 + b^{-2})^{1/2}]$$

$$b \equiv \frac{\rho\eta_{xx} - \eta_{yy}}{2i\eta_{yx}\rho^{1/2}}$$

例えばaが正ならば右回り楕円偏光、負ならば左回り楕円偏光

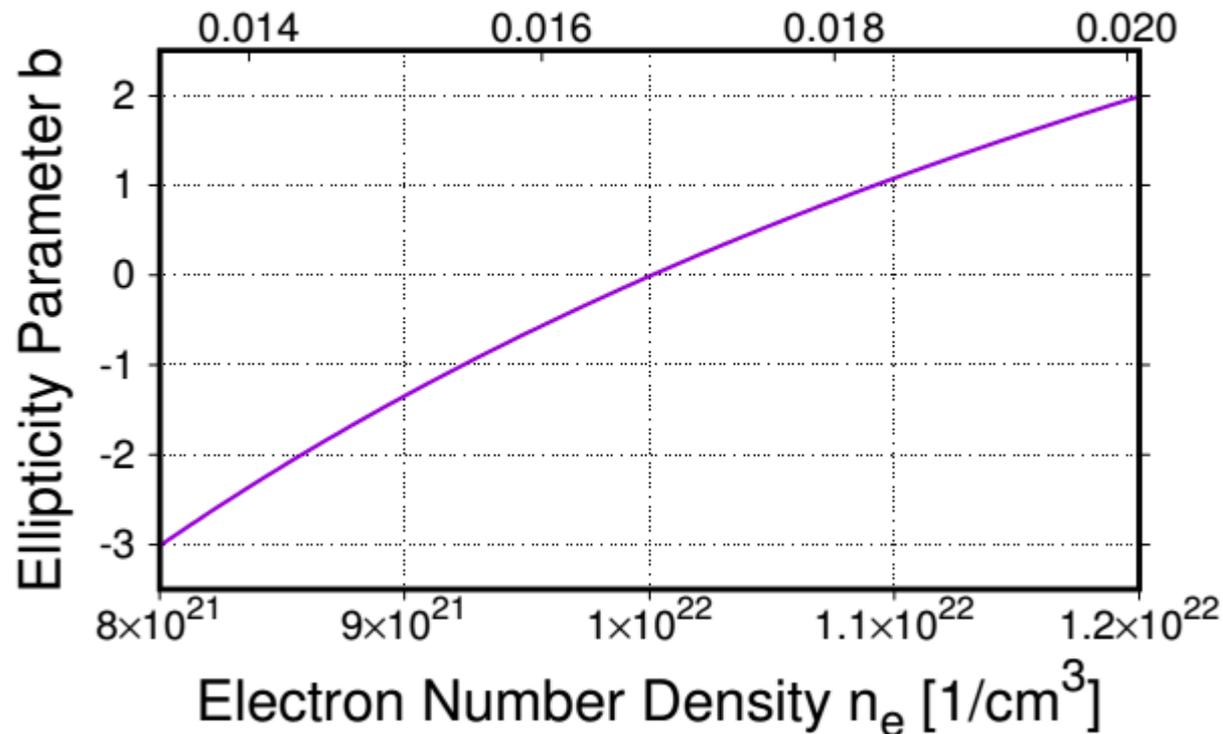


# 楕円パラメータの変化

楕円パラメータはプラズマの密度と磁場の強さで変化する。

$$b \simeq \left( 1 + \frac{3\delta(1-u)}{uv} \right) \frac{u^{1/2} \sin 2\theta}{2 \cos \theta (1-v)}$$

Mass Density for Fully Ionized Hydrogen  $\rho$  [g/cm<sup>3</sup>]

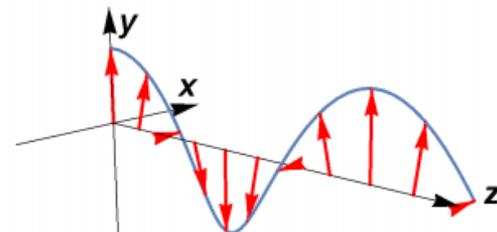
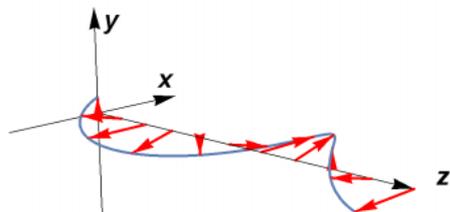


# プラズマ密度に伴う固有モードの変化

Plus-mode

Minus-mode

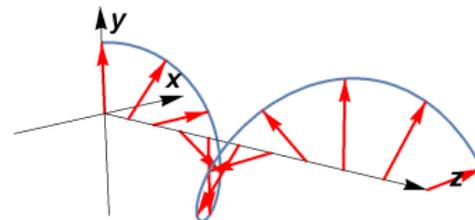
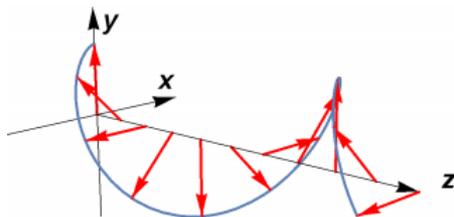
Dense Plasma  
( $b > 0$ )



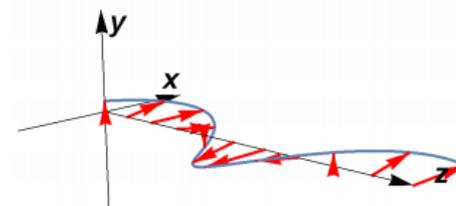
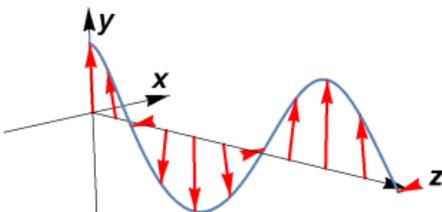
Ordinary Mode  
(O-mode)

Extraordinary Mode  
(E-mode)

Vacuum Resonance  
( $b = 0$ )



Thin Plasma  
( $b < 0$ )



E-mode

O-mode



# エネルギー依存性

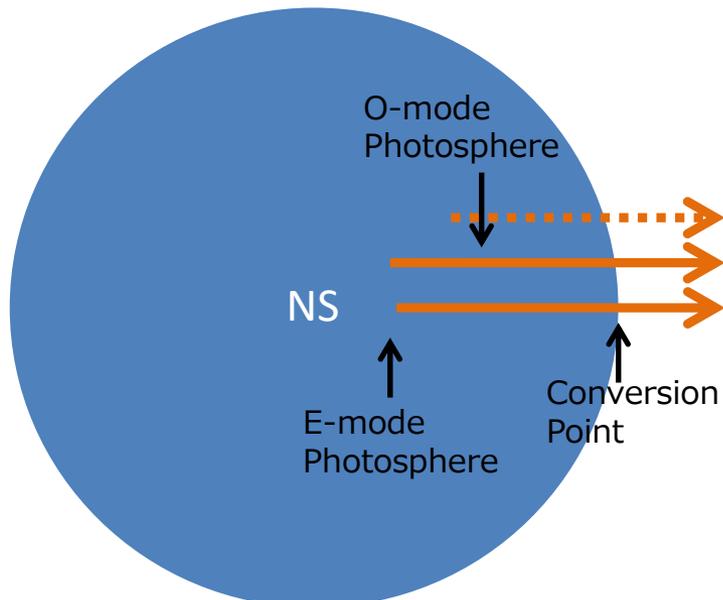
モード変換は光子のエネルギーによって、起こる確率が変わる。モード変換が断熱的に起こるには以下のエネルギーよりも高くなくてはならない。

$$E \gtrsim 1.49(f \tan \theta_B |1 - u_i|)^{2/3} \left( \frac{5 \text{cm}}{H_\rho} \right)^{1/3} \text{keV}$$

D. Lai, W. C. G. Ho, ApJ, 588(2003) 962

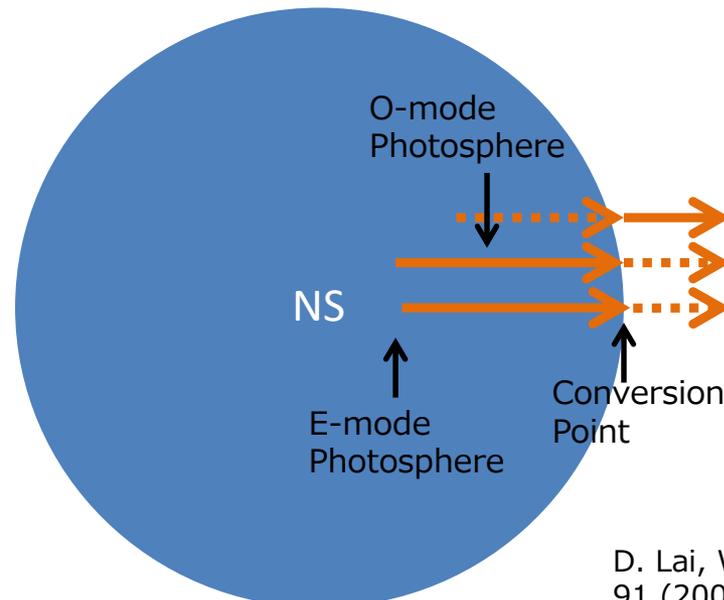
普通の( $B \sim 10^{12} \text{G}$ ) 中性子星

低エネルギー光子



モード変換は起こらず  
⇒Eモードが支配的

高エネルギー光子



モード変換が起こる  
⇒Oモードが支配的

D. Lai, W. C. G. Ho, PRL  
91 (2003) 071101

# 磁場依存性

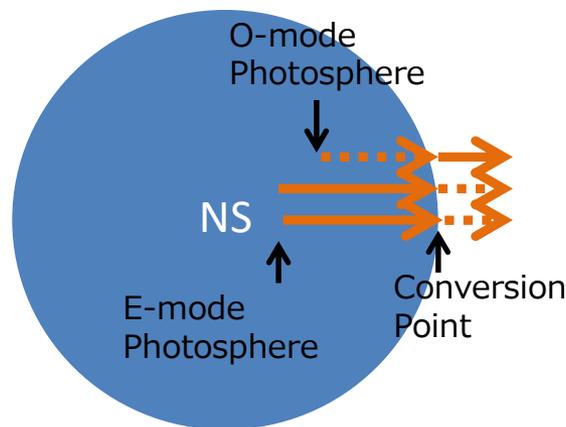
$$\rho_V \simeq 0.964 Y_e^{-1} \left( \frac{B}{10^{14} \text{G}} \right)^2 \left( \frac{E}{1 \text{keV}} \right)^2 f^{-2} \text{g cm}^{-3}$$

$$\rho_O \simeq 0.42 \left( \frac{T}{10^6 \text{K}} \right)^{-1/4} \left( \frac{E}{1 \text{keV}} \right)^{3/2} G^{-1/2} \text{g cm}^{-3}$$

$$\rho_E \simeq 486 \left( \frac{T}{10^6 \text{K}} \right)^{-1/4} \left( \frac{E}{1 \text{keV}} \right)^{1/2} \left( \frac{B}{10^{14} \text{G}} \right) G^{-1/2} \text{g cm}^{-3}$$

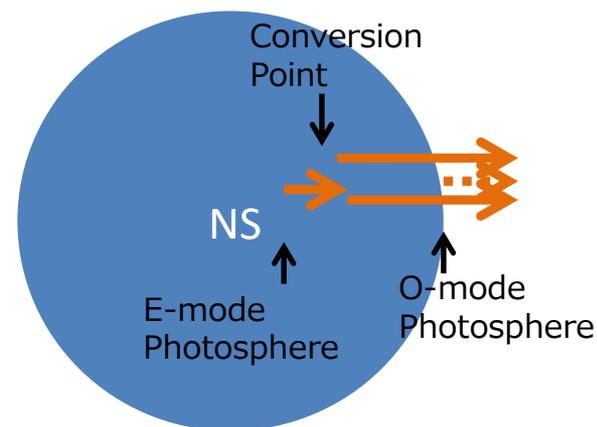
$B \lesssim 5 \times 10^{13} \text{G}$

モード変換は光球面の外側で  
⇒Oモードが支配的



$B \gtrsim 5 \times 10^{13} \text{G}$

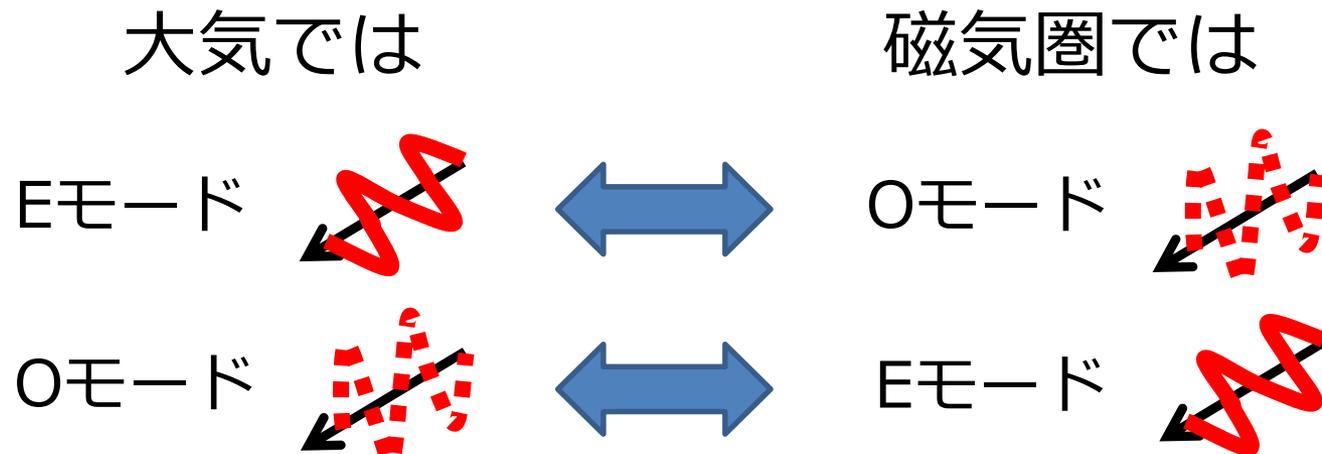
モード変換は光球面の内側で  
⇒Eモードが支配的



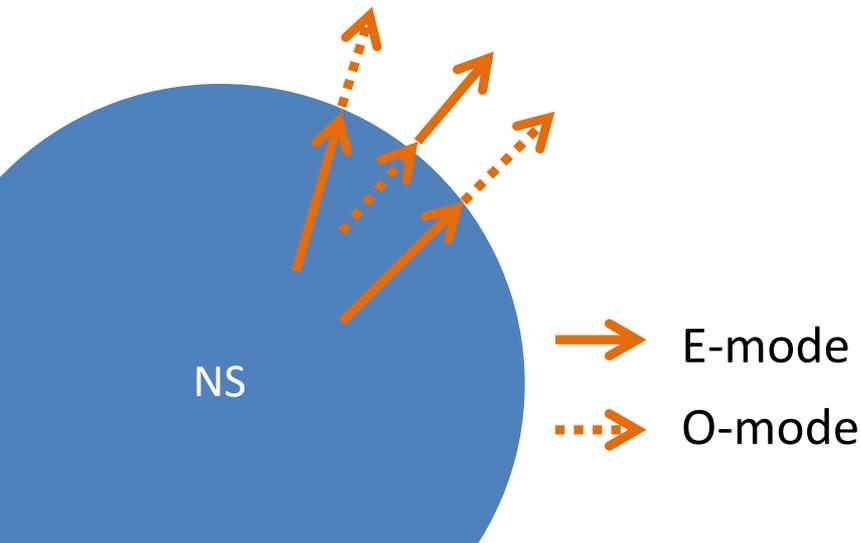
→ E-mode photons    - - - → O-mode photons

# 熱的放射でのモード変換：まとめ

## 中性子星におけるモード変換



## エネルギーと磁場の依存性



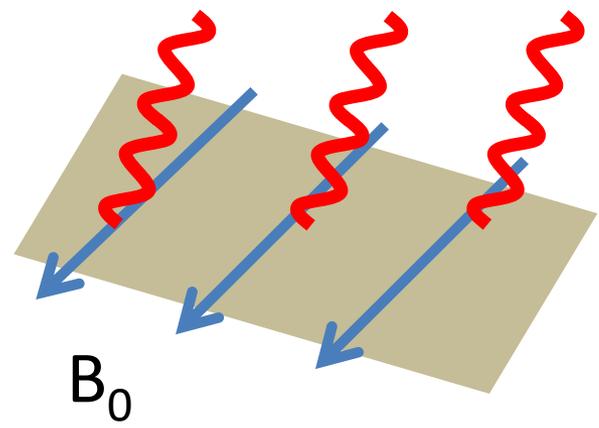
モード変換は

- ①光子のエネルギーが高い  
 $E \geq 2\text{keV}$
- ②表面磁場が極めて強くはない  
 $B \leq 5 \times 10^{13}\text{G}$

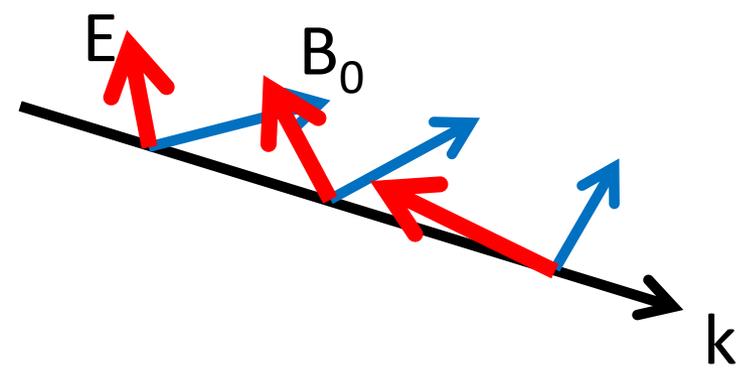
とよく起こる。

# モード変換も考慮した

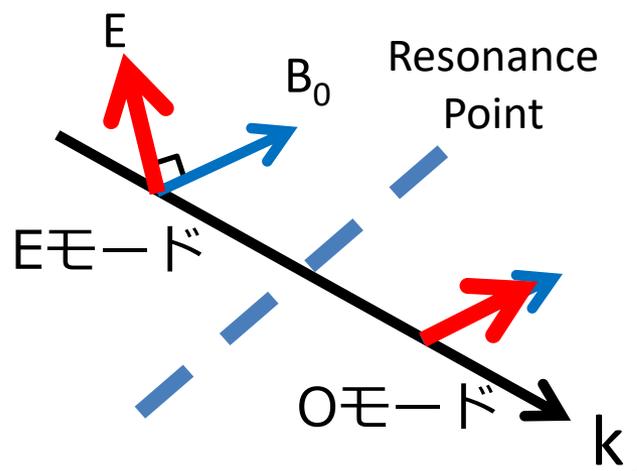
偏光した表面放射



磁気圏における偏光の発展



モード変換



磁気圏  
大気

中性子星

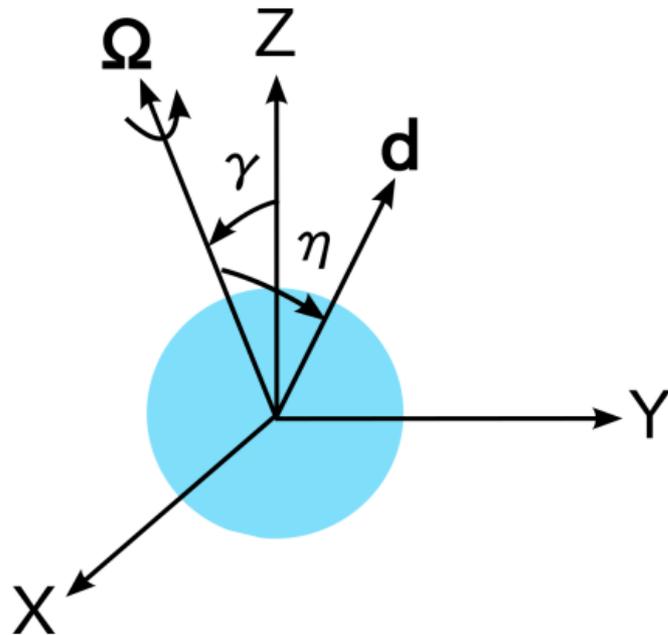


# 設定

Observer



- 表面放射はすべてE-modeであるが **モード変換** をエネルギーと磁場の依存性を考慮して取り入れる。
- 偏光はpolarization-limiting radiusで決まる。
- 偏光度  $\Pi_L$  と偏光角  $\chi_p$  を求める



$$\Pi_L = \frac{\sqrt{Q^2 + U^2}}{I}, \quad \chi_p = \frac{1}{2} \arctan \left( \frac{U}{Q} \right).$$

I, Q, U: Stokes parameter

- 観測者はZ軸方向の無限遠にいる
- ダイポール磁場
- 放射はZ軸方向に伝播する
- 一般相対性理論の効果は考えない

# モード変換の有無

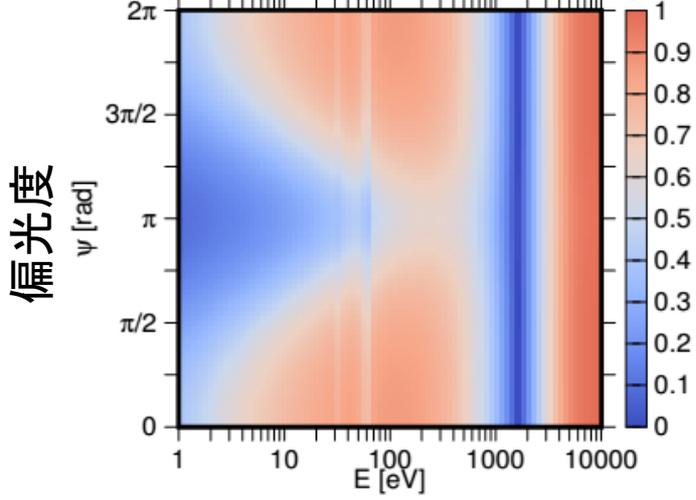
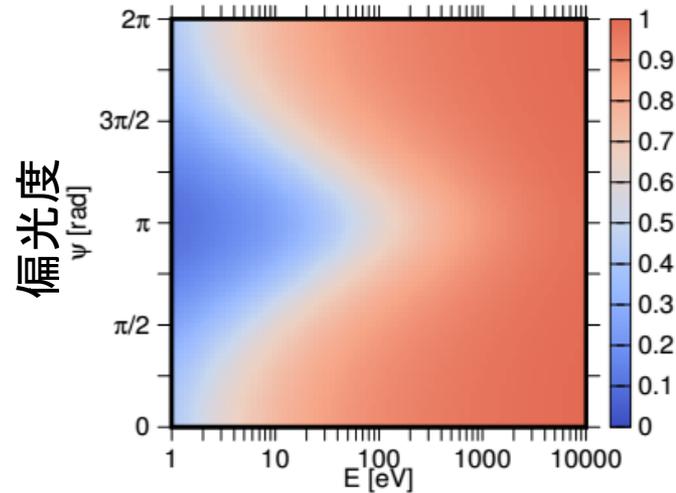
$\gamma=15^\circ, \eta=5^\circ, B=10^{13}G$   
 (Same as Taverna+ (2015))

モード変換なし

モード変換あり

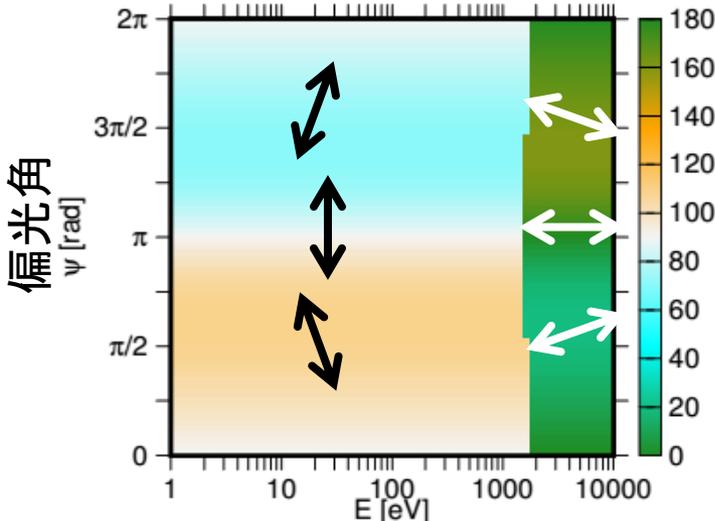
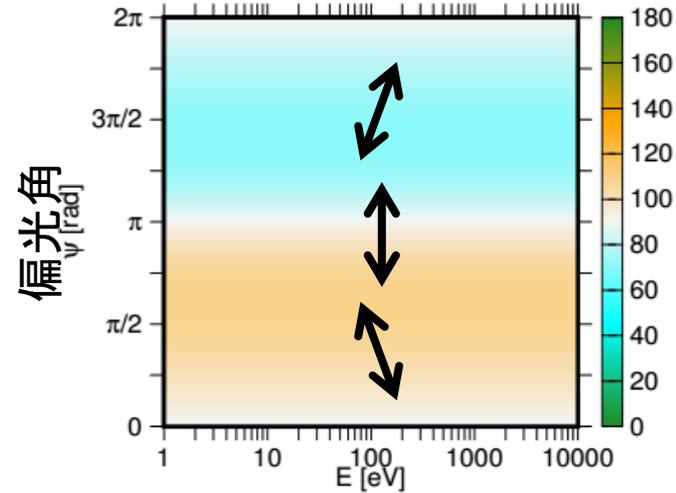
(a)  $\Pi_L$  (Taverna et al., NMC)

(b)  $\Pi_L$  (Taverna et al. with MC)



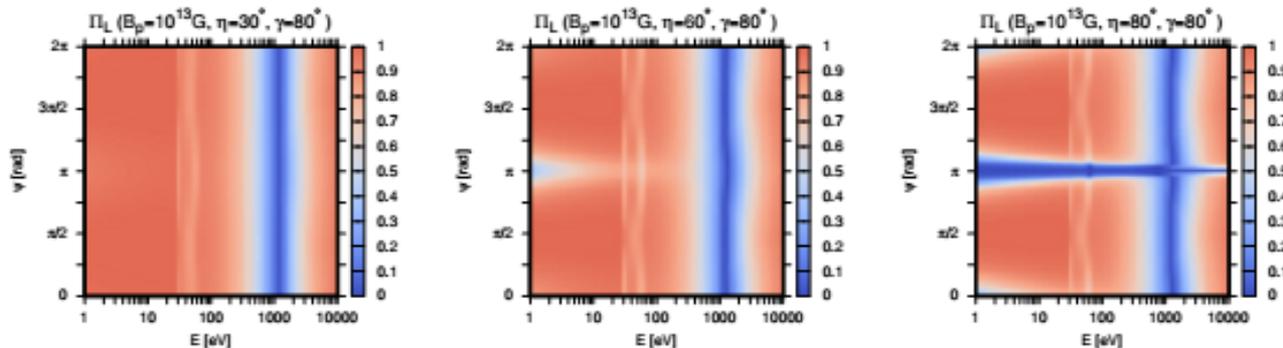
(a)  $\chi_p$  [deg] (Taverna et al., NMC)

(b)  $\chi_p$  [deg] (Taverna et al. with MC)

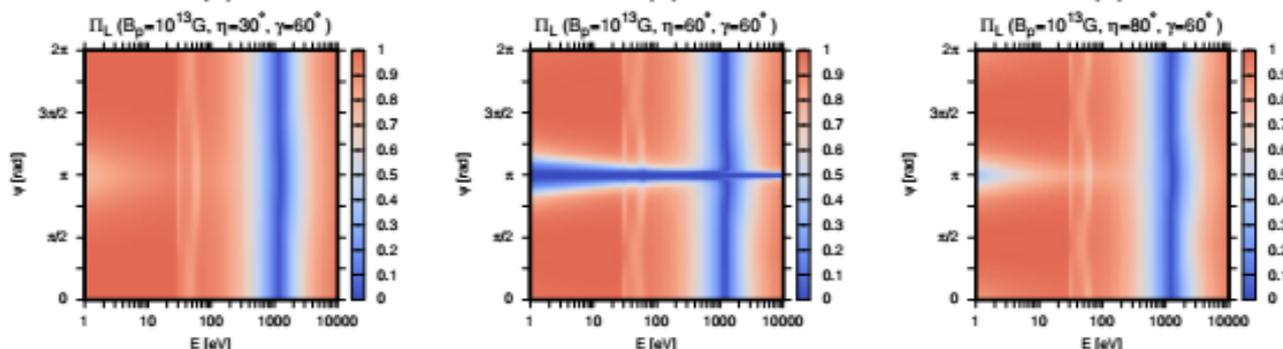


# 偏光度 ( $B=10^{13}\text{G}$ )

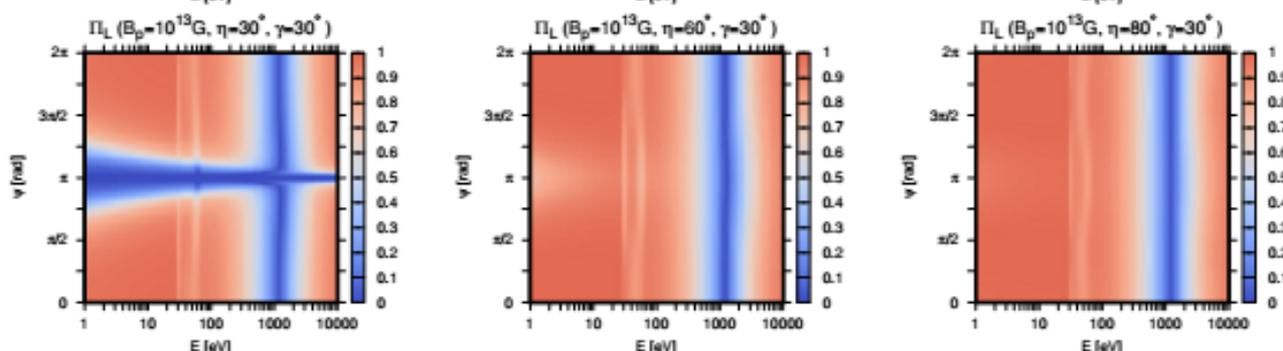
$\gamma=80^\circ$



$\gamma=60^\circ$



$\gamma=30^\circ$



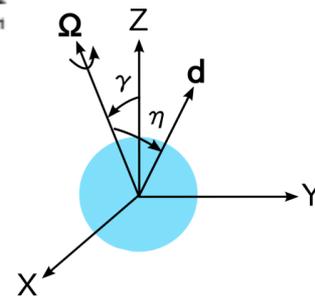
↑ 回転位相

→ エネルギー

$\eta=30^\circ$

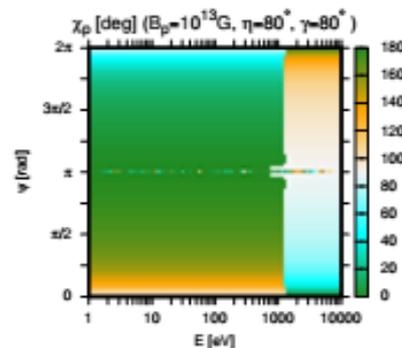
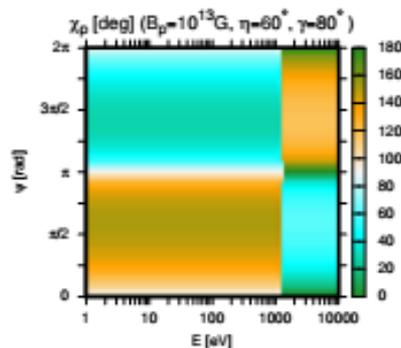
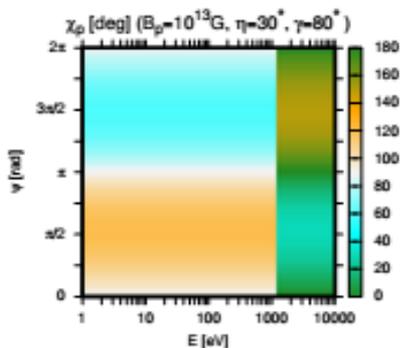
$\eta=60^\circ$

$\eta=80^\circ$

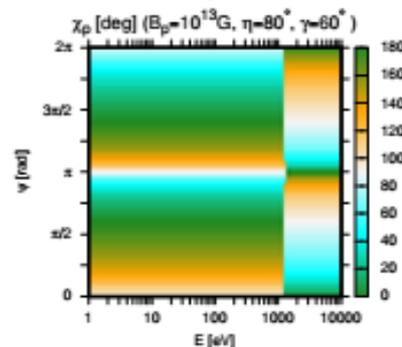
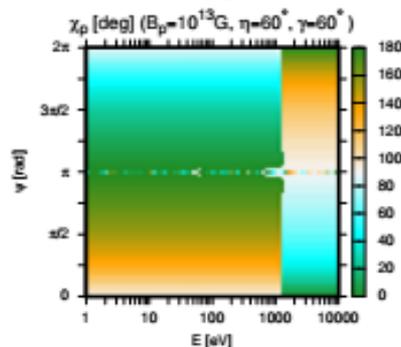
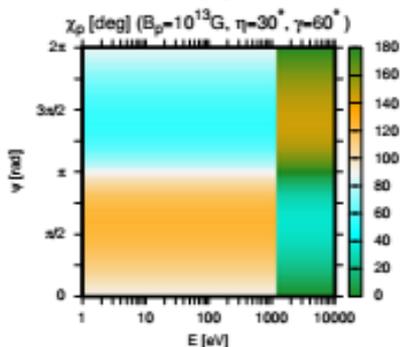


# 偏光角 ( $B=10^{13}\text{G}$ )

$\gamma=80^\circ$

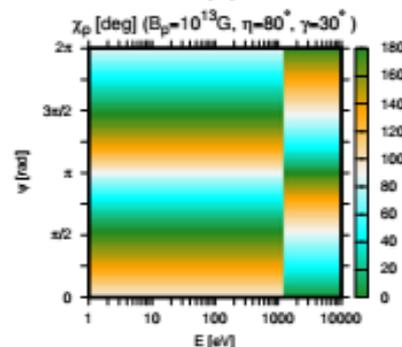
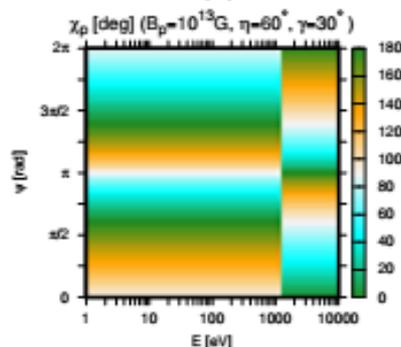
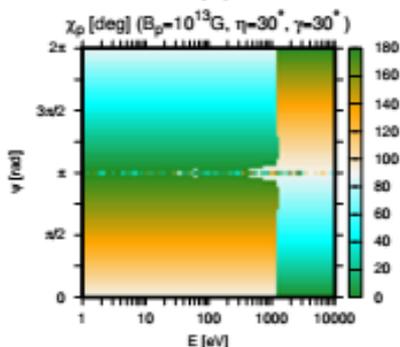


$\gamma=60^\circ$



$\gamma=30^\circ$

回転位相 ↑

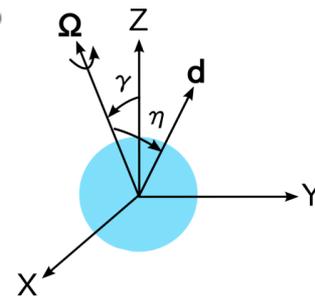


エネルギー →

$\eta=30^\circ$

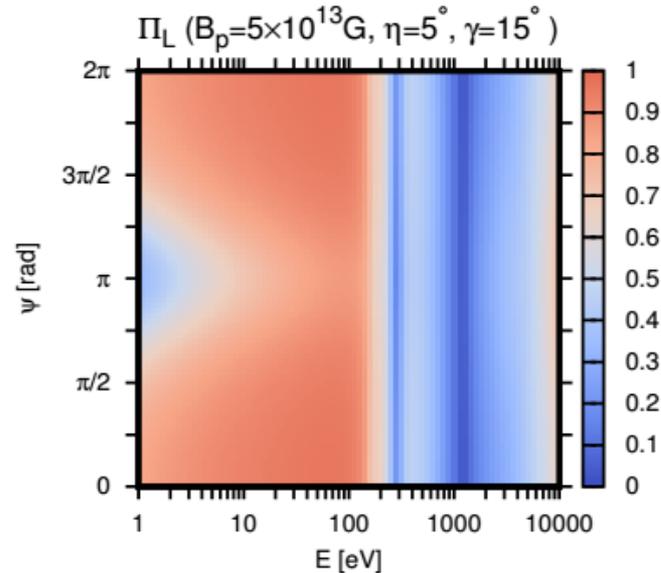
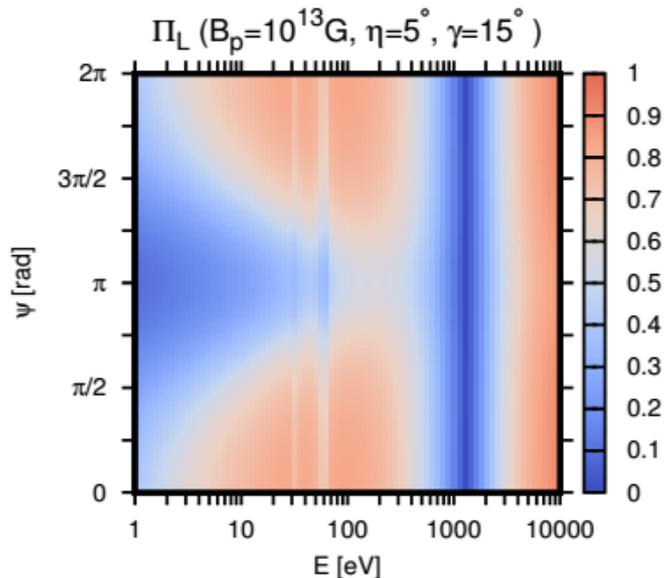
$\eta=60^\circ$

$\eta=80^\circ$

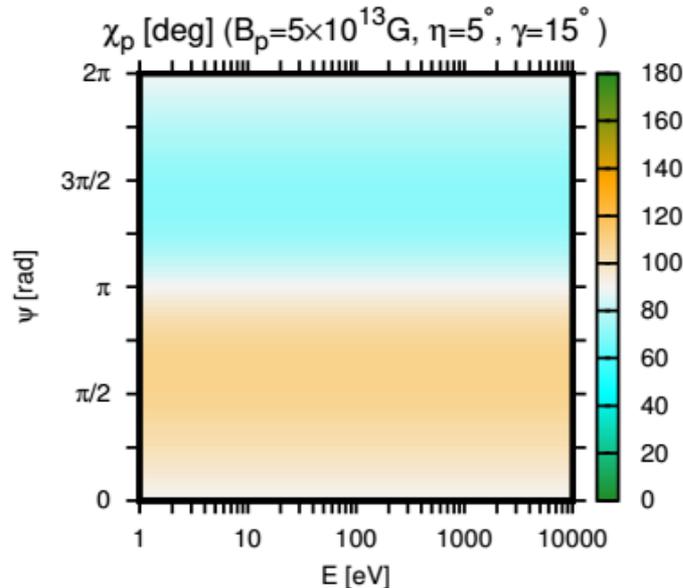
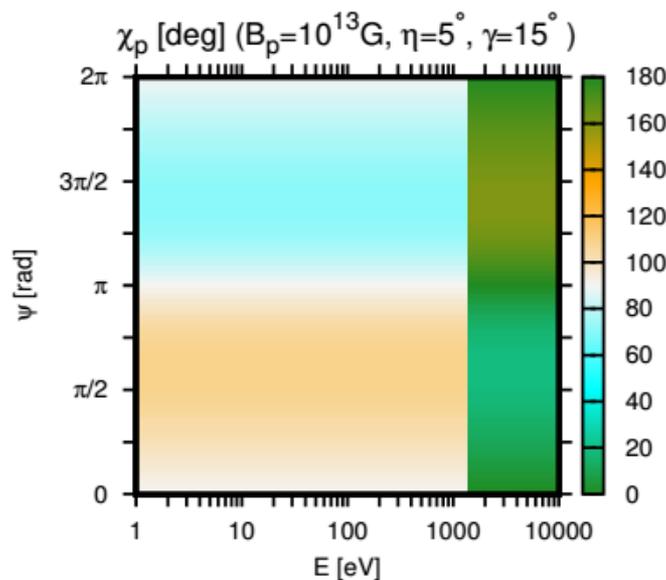


# 磁場強度を変える( $10^{13}\text{G}$ と $5\times 10^{13}\text{G}$ )

偏光度

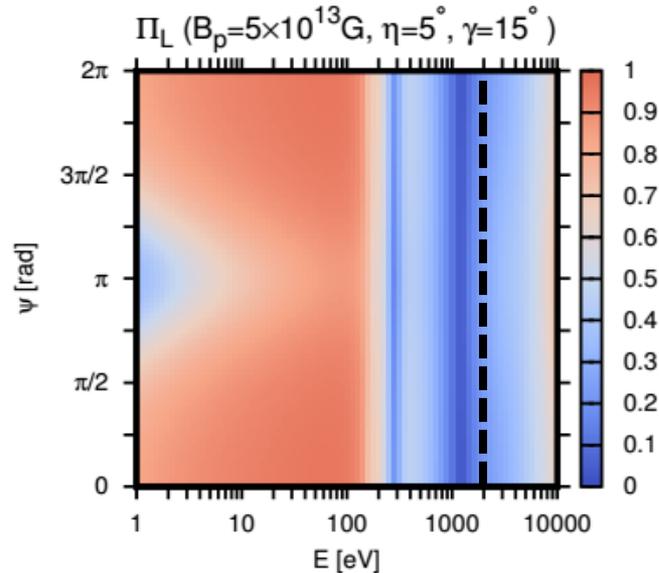
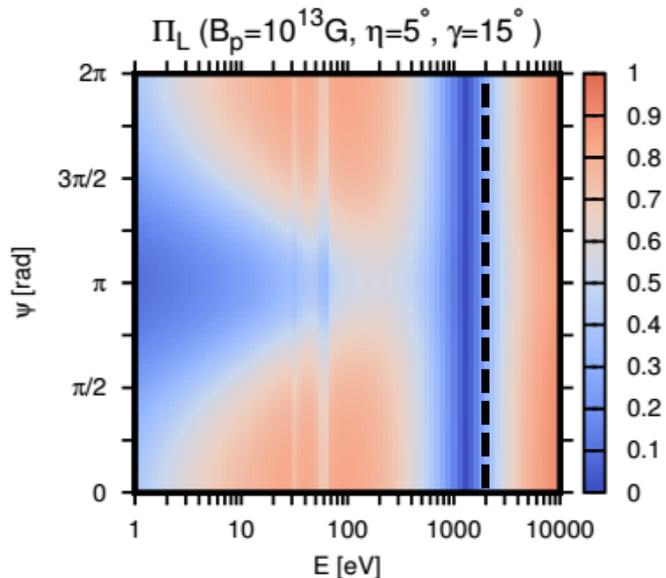


偏光角

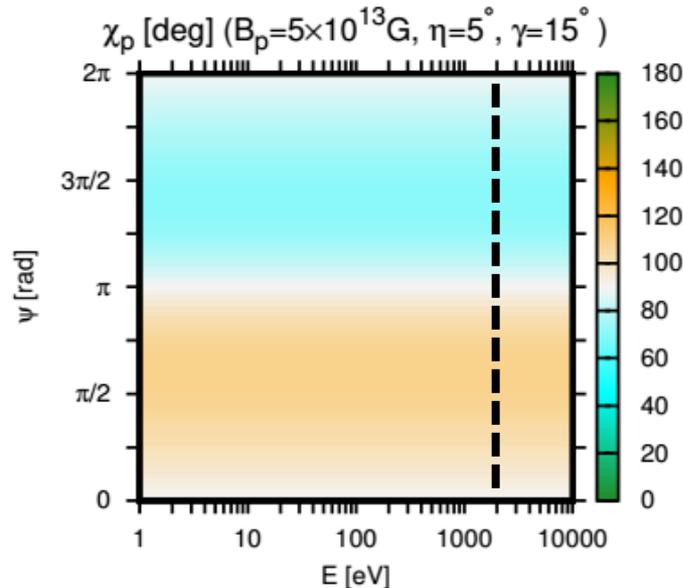
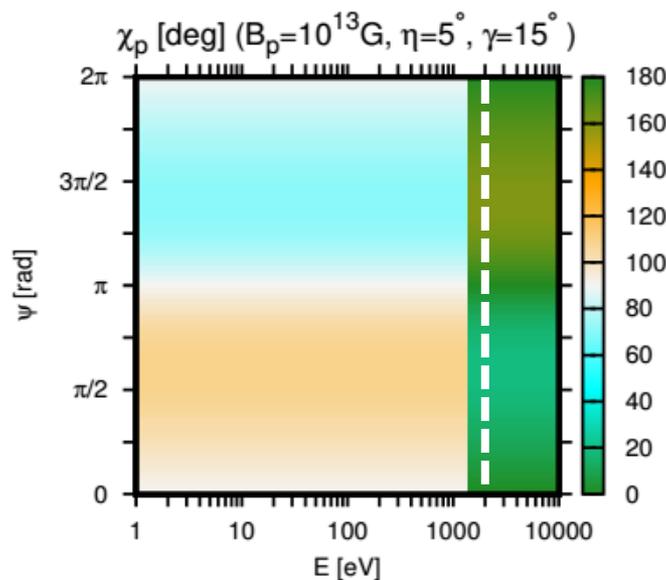


# 磁場強度を変える( $10^{13}\text{G}$ と $5\times 10^{13}\text{G}$ )

偏光度



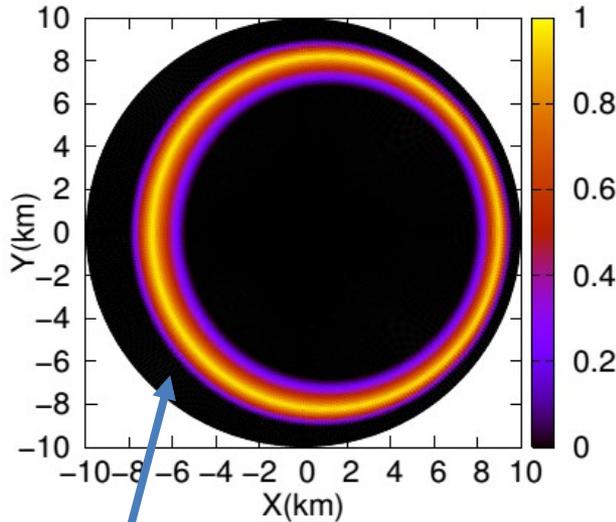
偏光角



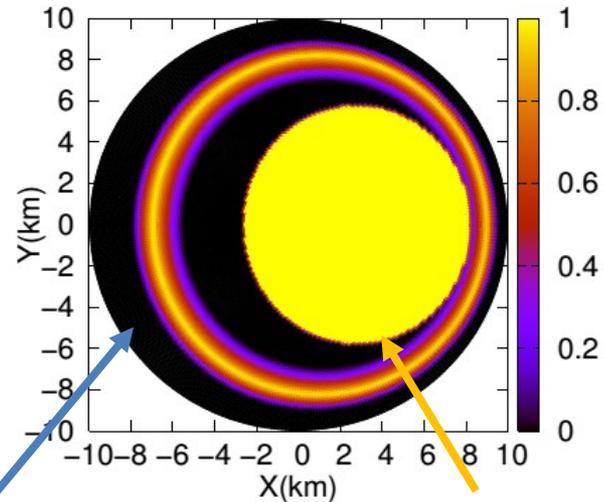
# 2keVにおけるEモードの割合

Eモード割合

$10^{13}\text{G}, \eta=5^\circ, \gamma=15^\circ, \psi=0$



$5 \times 10^{13}\text{G}, \eta=5^\circ, \gamma=15^\circ, \psi=0$

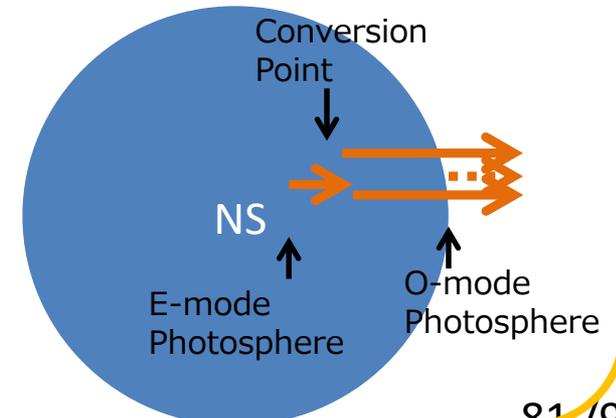


モード変換は

$$E_{\text{ad}} = 1.49(f \tan \theta_B |1 - u_i|)^{2/3} \left( \frac{5\text{cm}}{H_\rho} \right)^{1/3} \text{keV},$$

より充分に高いエネルギーならば起こるが、表面における磁場の向きが光子の進行方向と垂直だとこのエネルギーが非常に大きくなりモード変換が起きなくなる。

磁極付近ではモード変換は光球面の内側で起こる



# 磁極付近の見え方

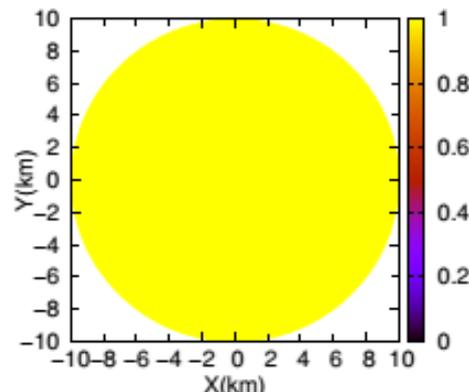
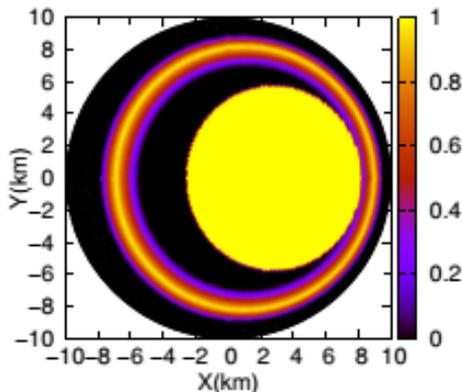
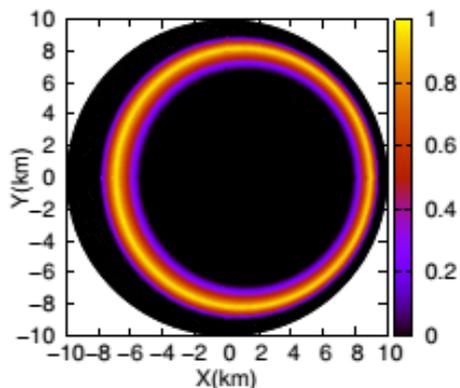
$$\eta=5^\circ, \gamma=15^\circ, \psi=0$$

$$B_p=10^{13}\text{G}$$

$$B_p=5\times 10^{13}\text{G}$$

$$B_p=10^{14}\text{G}$$

Eモード割合



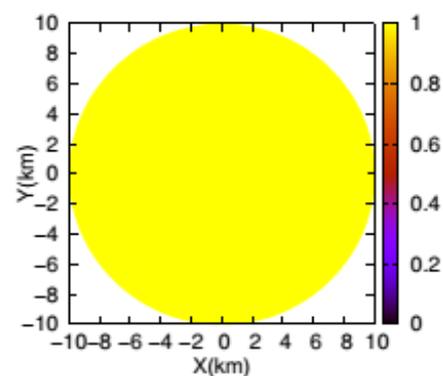
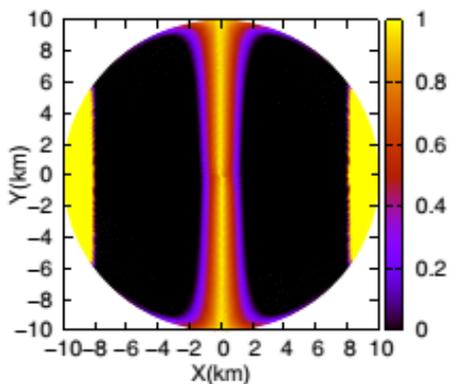
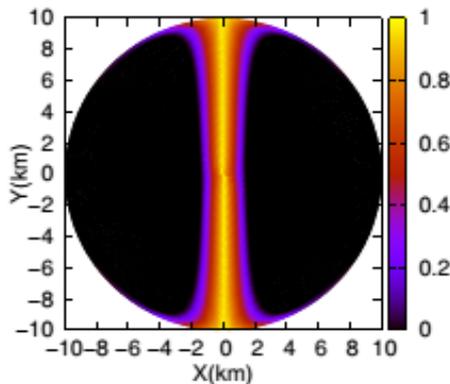
$$\eta=0^\circ, \gamma=90^\circ, \psi=0$$

$$B_p=10^{13}\text{G}$$

$$B_p=5\times 10^{13}\text{G}$$

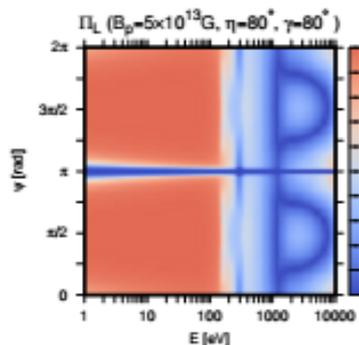
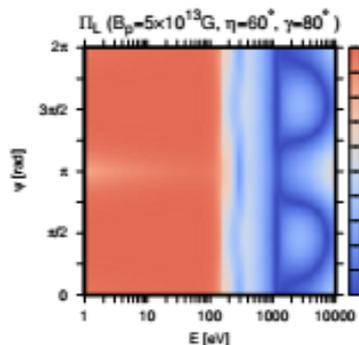
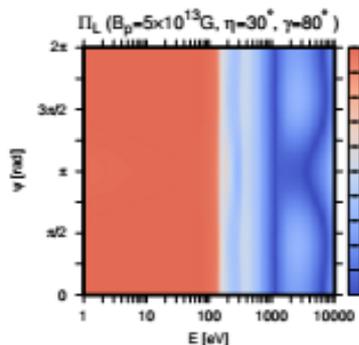
$$B_p=10^{14}\text{G}$$

Eモード割合

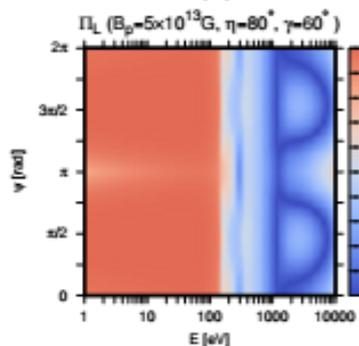
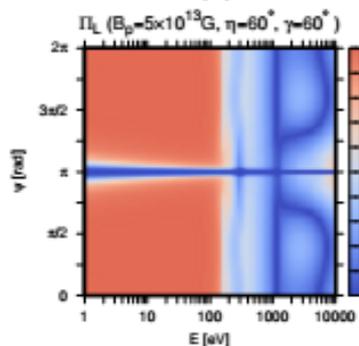
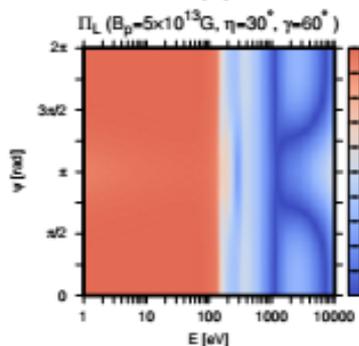


# 偏光度 ( $B=5 \times 10^{13} \text{G}$ )

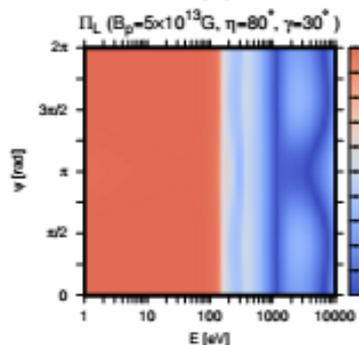
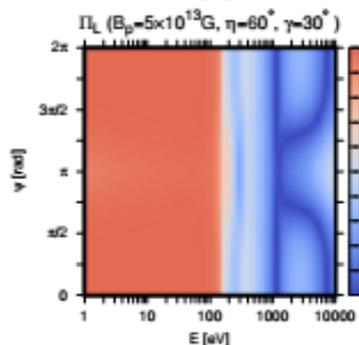
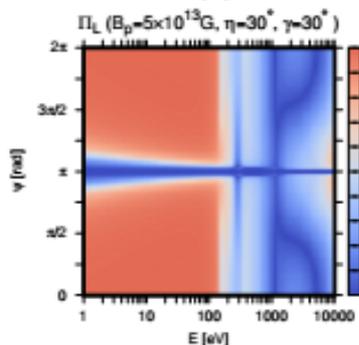
$\gamma=80^\circ$



$\gamma=60^\circ$



$\gamma=30^\circ$



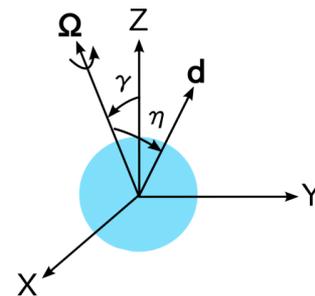
回転位相 ↑

エネルギー →

$\eta=30^\circ$

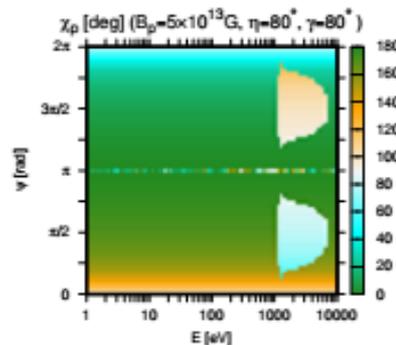
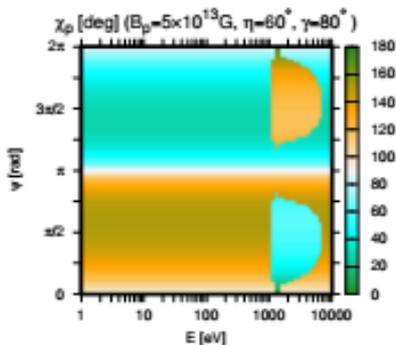
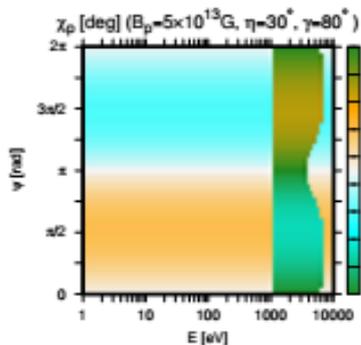
$\eta=60^\circ$

$\eta=80^\circ$

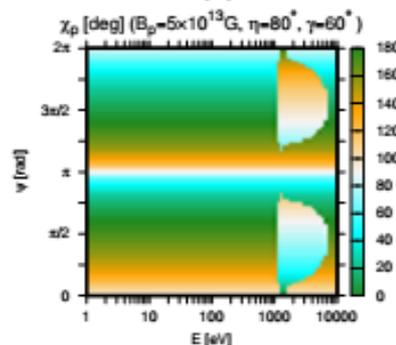
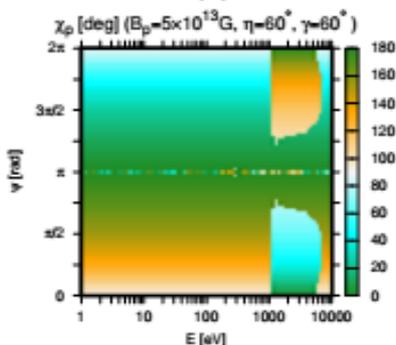
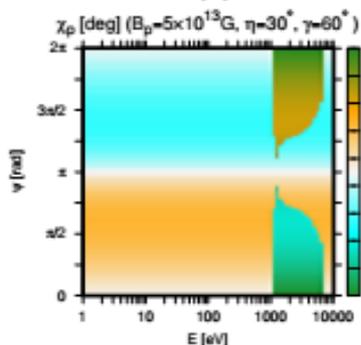


# 偏光角( $B=5 \times 10^{13} \text{G}$ )

$\gamma=80^\circ$

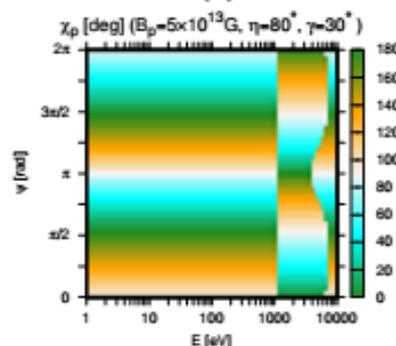
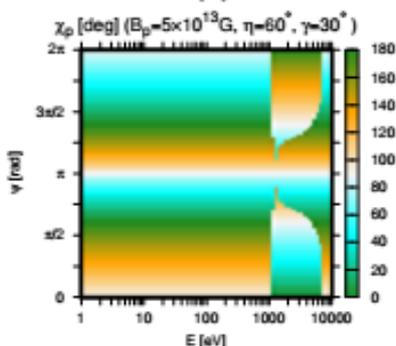
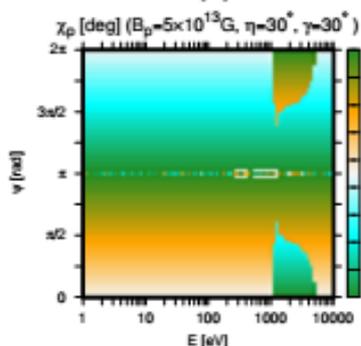


$\gamma=60^\circ$



$\gamma=30^\circ$

↑ 回転位相

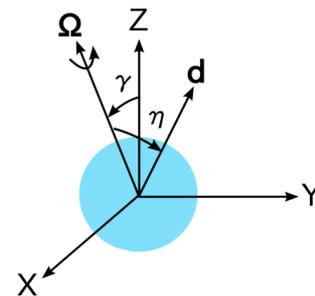


→ エネルギー

$\eta=30^\circ$

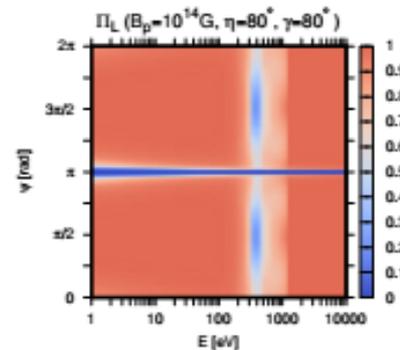
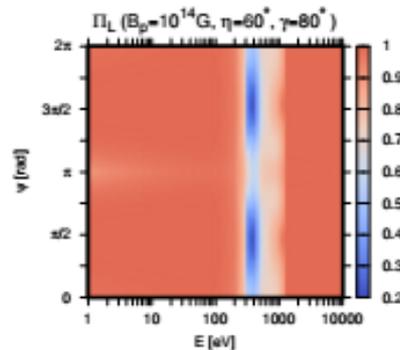
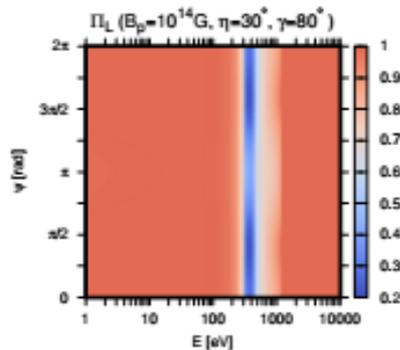
$\eta=60^\circ$

$\eta=80^\circ$

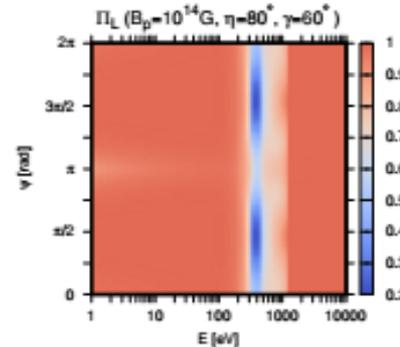
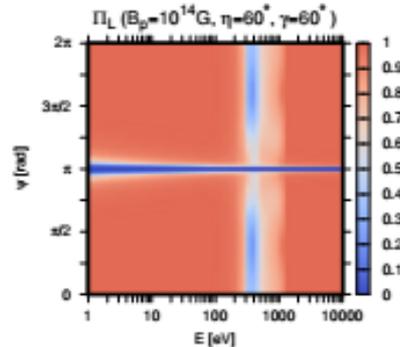
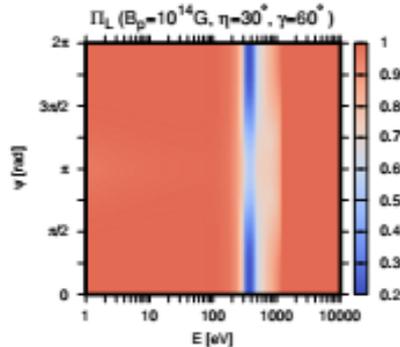


# 偏光度 ( $B=10^{14}\text{G}$ )

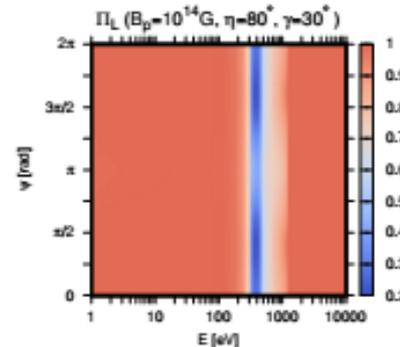
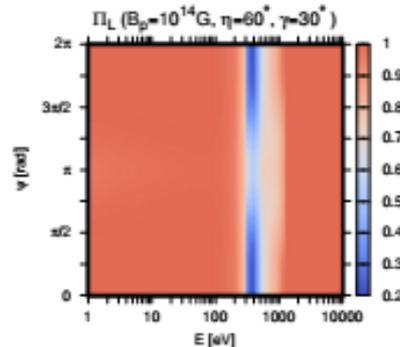
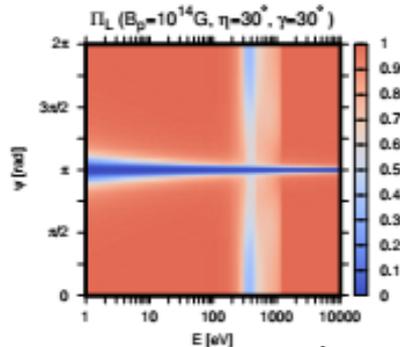
$\gamma=80^\circ$



$\gamma=60^\circ$



$\gamma=30^\circ$



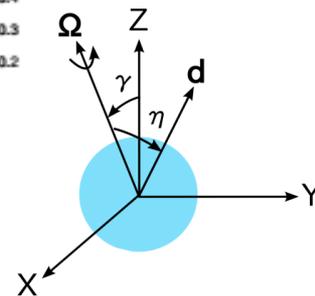
回転位相

エネルギー

$\eta=30^\circ$

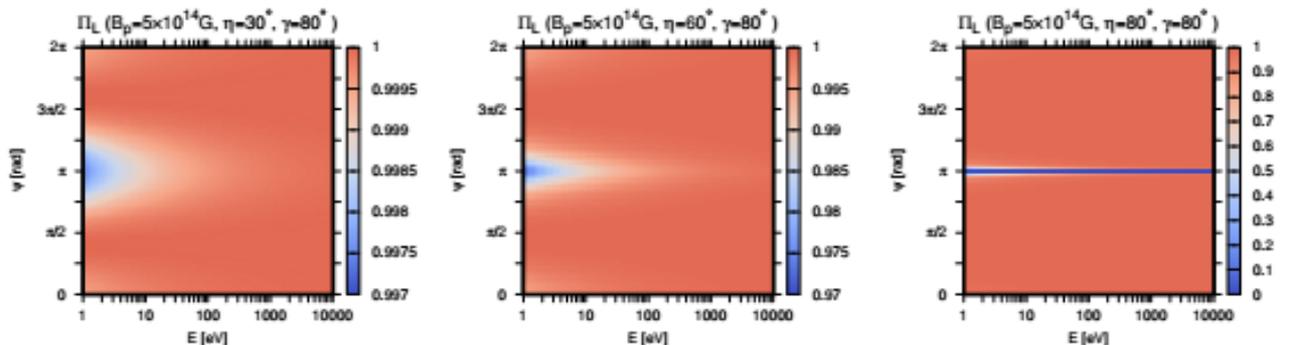
$\eta=60^\circ$

$\eta=80^\circ$

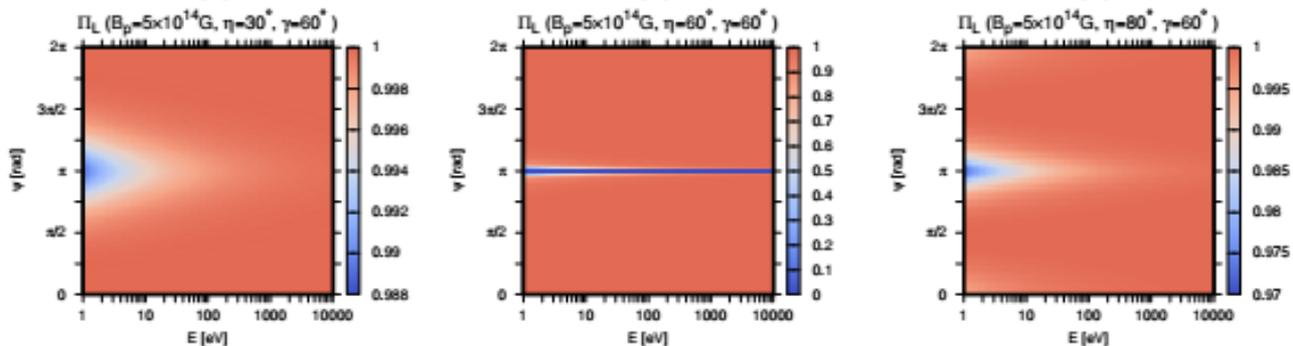


# 偏光度 ( $B=5 \times 10^{14} \text{G}$ )

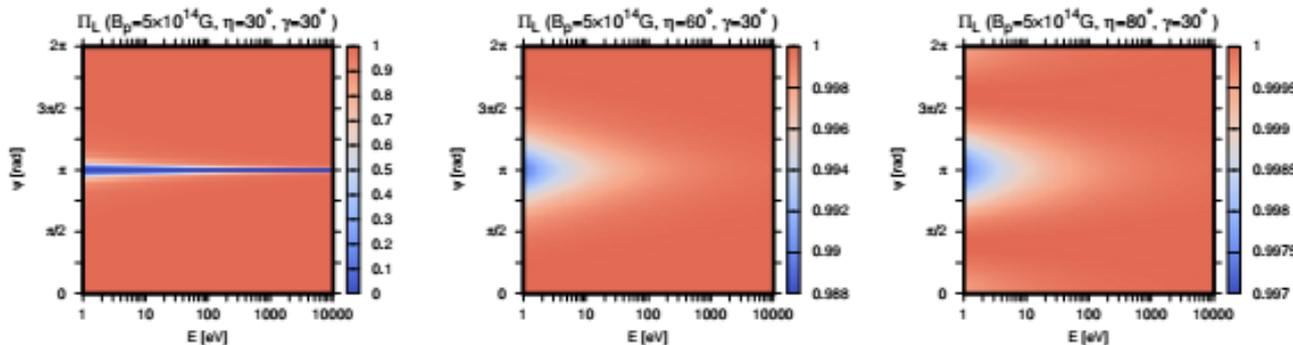
$\gamma=80^\circ$



$\gamma=60^\circ$



$\gamma=30^\circ$



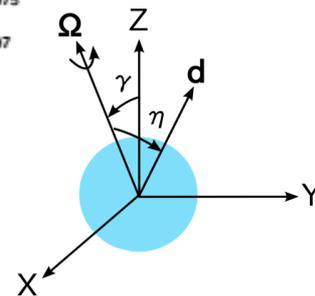
↑  
回転位相

→  
エネルギー

$\eta=30^\circ$

$\eta=60^\circ$

$\eta=80^\circ$



# 位相平均をとった観測量

$E=5\text{keV}$ ,  $T=0.4\text{keV}$

$B_p=10^{13}\text{G}$   
モード変換なし

$B_p=10^{13}\text{G}$   
モード変換あり

$B_p=5\times 10^{13}\text{G}$   
モード変換あり

$B_p=10^{14}\text{G}$   
モード変換あり

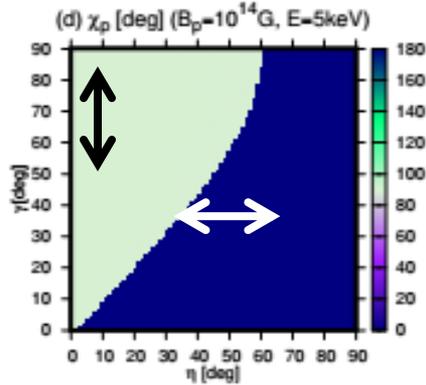
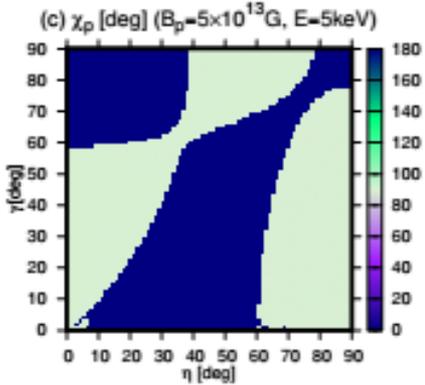
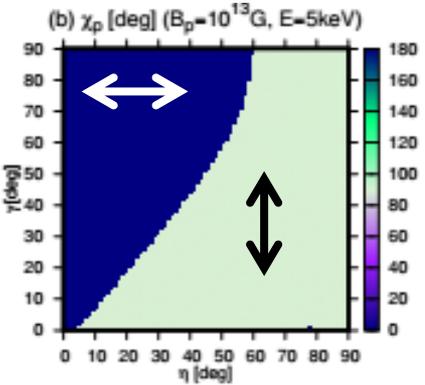
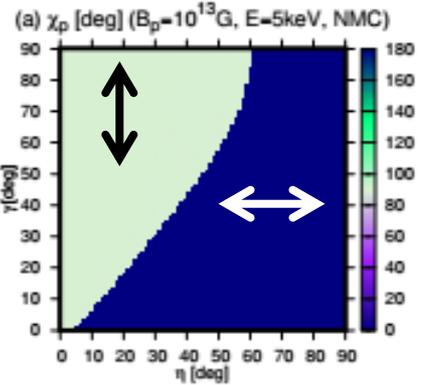
回転軸の見込み角[deg]

偏光角[deg]

偏光角[deg]

偏光角[deg]

偏光角[deg]



磁軸と回転軸のなす角[deg]

偏光角の変化

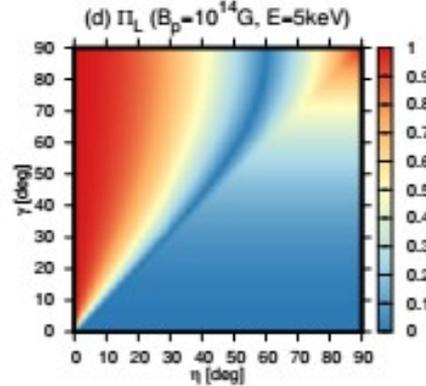
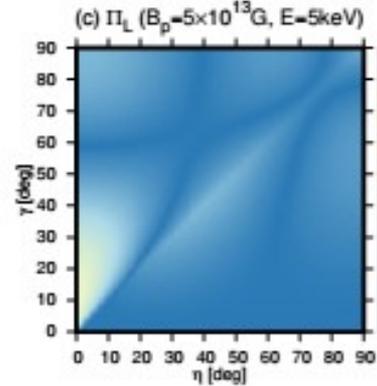
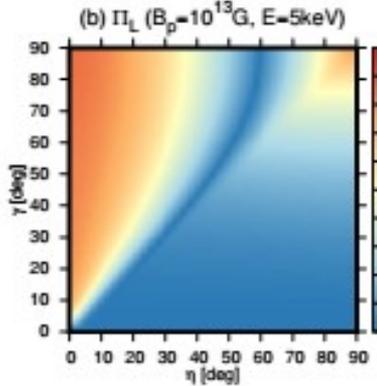
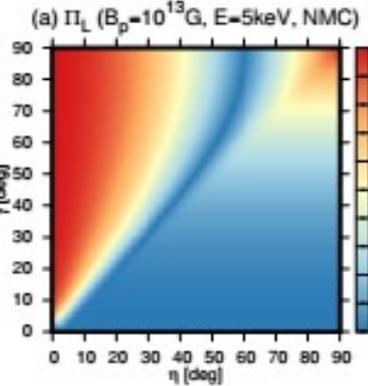
回転軸の見込み角[deg]

偏光度

偏光度

偏光度

偏光度

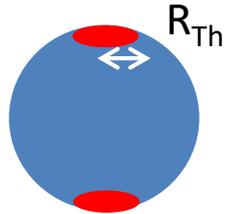


磁軸と回転軸のなす角[deg]

偏光の打ち消し

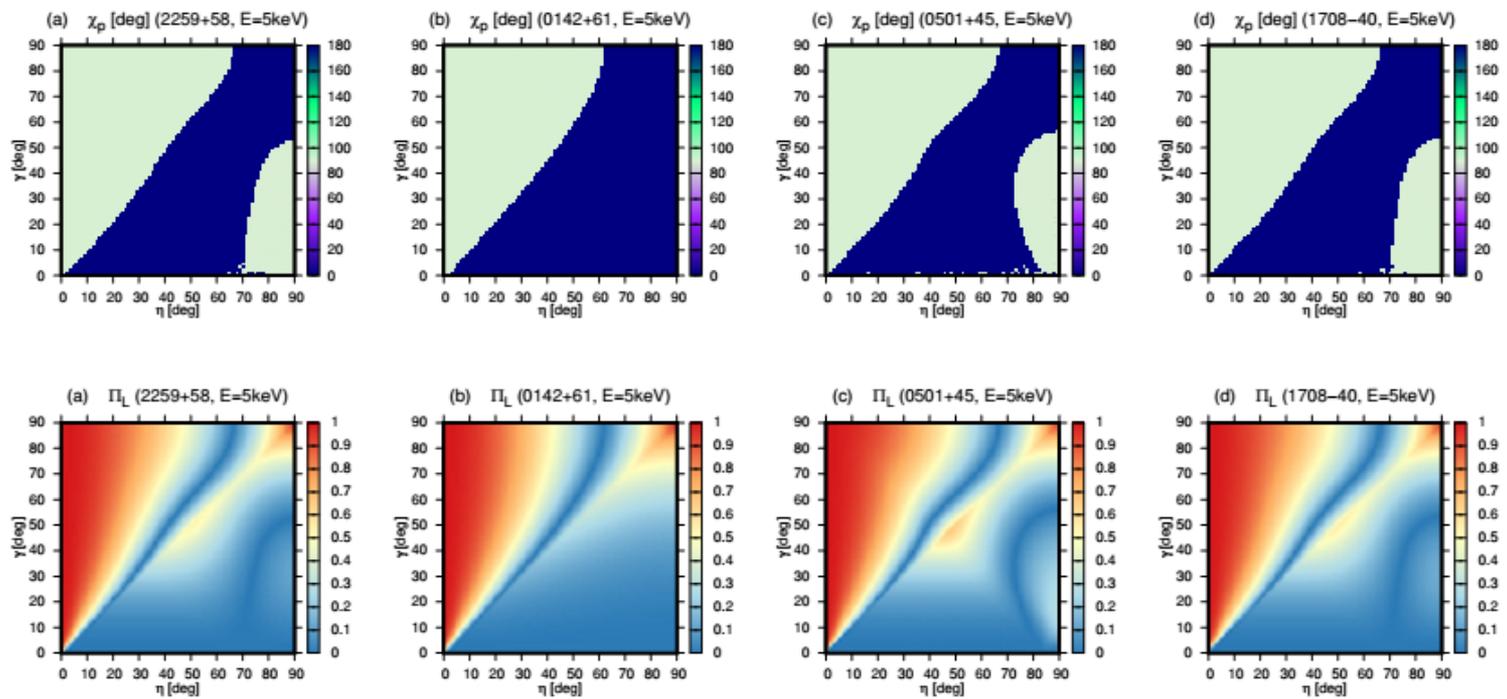
# マグネター

Magnetar	B	T	$R_{Th}$
1E 2259+586	$5.9 \times 10^{13}$ G	0.37 keV	5.0 km
4U 0142+61	$1.3 \times 10^{14}$ G	0.36 keV	9.4 km
SGR 0501+45	$1.9 \times 10^{14}$ G	0.70 keV	1.4 km
1RXS J17089.0-400910	$4.7 \times 10^{14}$ G	0.48 keV	4.5 km



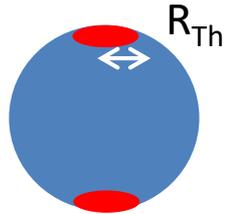
Y. E. Nakagawa et al.,  
PASJ 61(2009) 109

1,2,...10 keVではモード変換の効果なし



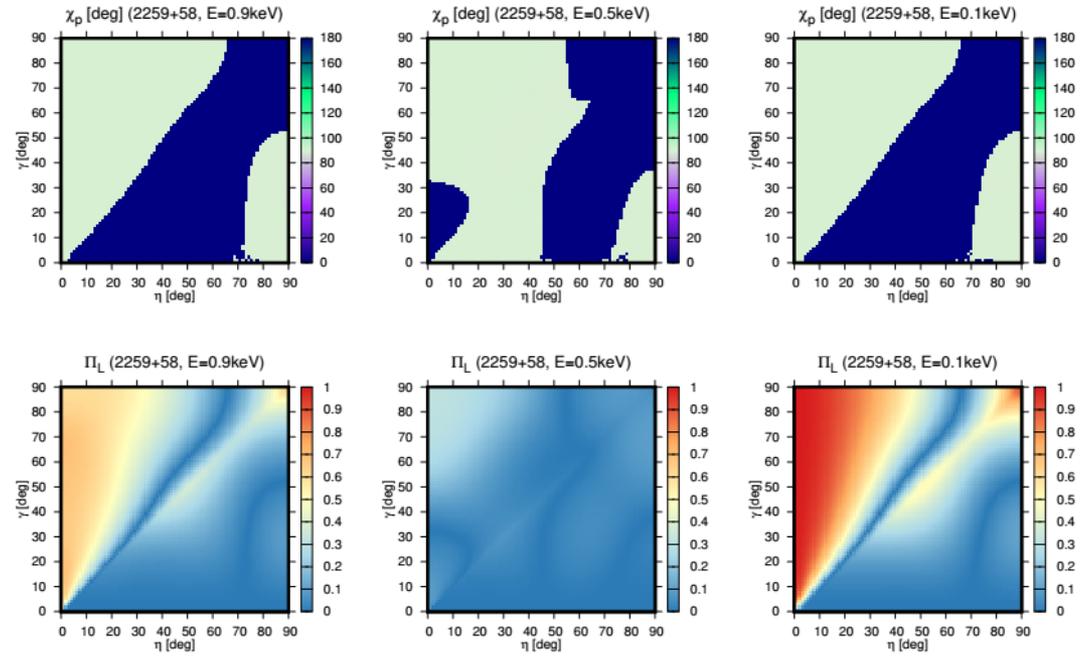
# マグネター

Magnetar	B	T	$R_{Th}$
1E 2259+586	$5.9 \times 10^{13}$ G	0.37 keV	5.0 km
4U 0142+61	$1.3 \times 10^{14}$ G	0.36 keV	9.4 km
SGR 0501+45	$1.9 \times 10^{14}$ G	0.70 keV	1.4 km
1RXS J17089.0-400910	$4.7 \times 10^{14}$ G	0.48 keV	4.5 km



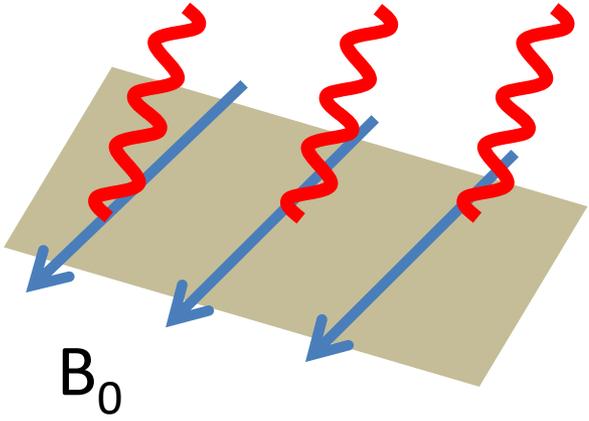
Y. E. Nakagawa et al.,  
PASJ 61(2009) 109

ただし、1E2259+586ならば1keV未満で偏光度が打ち消す

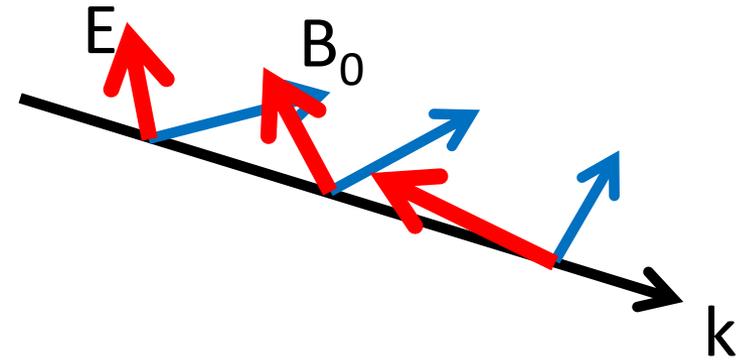


# (磁場が強い)マグネターの場合

偏光した表面放射



磁気圏における偏光の発展

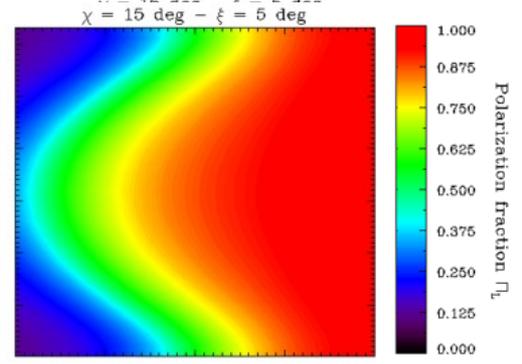


磁気圏  
大気

中性子星



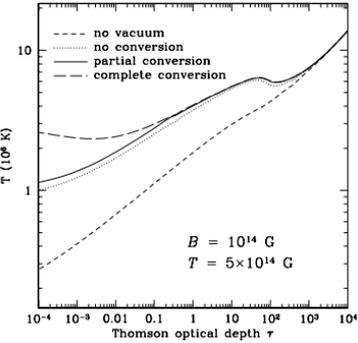
モード変換は効かない



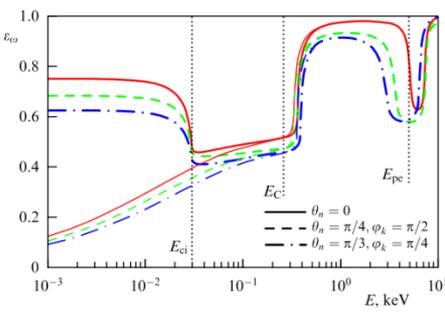
Taverna et al. (2015)

# 今後の展望

## 大気モデル

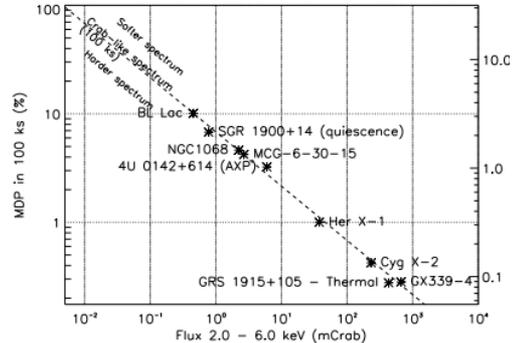


van Adelsberg & Lai (2006)



Potekhin (2014)

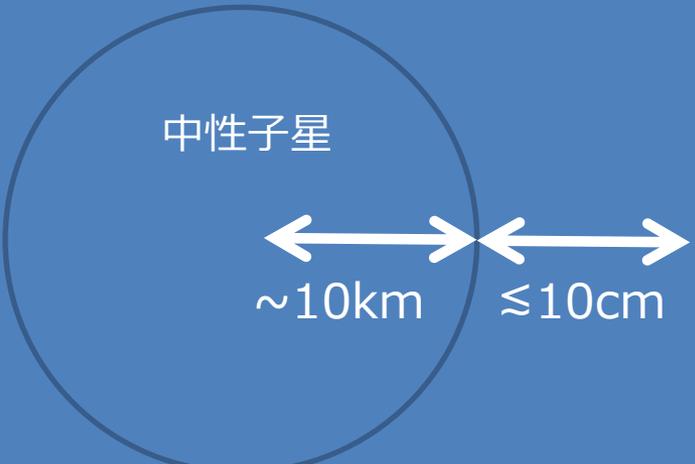
## 検出器での観測



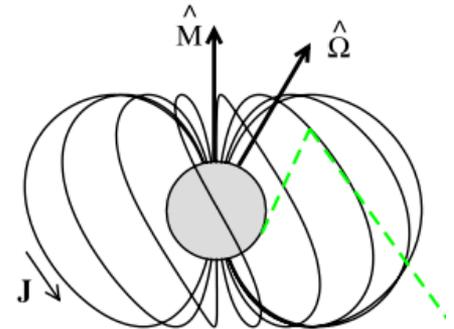
Weisskopf et al. (2013)

大気

磁気圏



## 磁場の構造



Fernández & Davis (2011)

# 小まとめ2

- 近い将来にマグネターの偏光が観測できるようになり、偏光は磁場構造とQEDの効果を反映している。
- モード変換の効果も考慮しなければ、回転位相ごとの偏光度は、多くの場合ほぼ1であり、偏光角は中性子星の姿勢によって大きく変化する。
- モード変換は偏光の向きを90度変えることがあり、磁場が極端に強くない場合に2keVを超えるエネルギーでは重要になる。
- マグネターの磁場が強いため、強い偏光が期待されるが、今回の例では1E 2259+681の1keV未満でしかモード変換は観測できない。

次世代の軟X線偏光観測衛星では

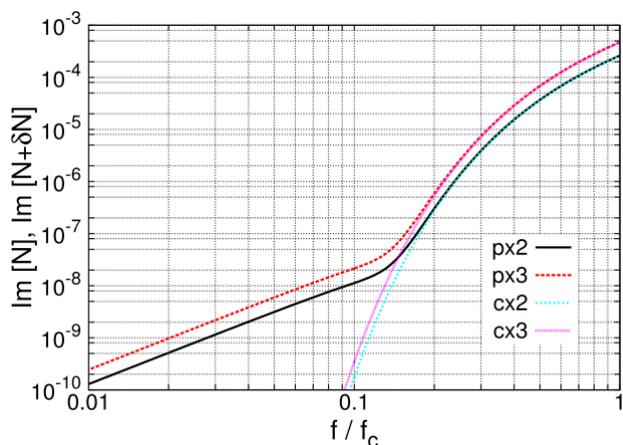
高い偏光度  $\Rightarrow B \gtrsim 10^{14} \text{G}$  のマグネター

モード変換  $\Rightarrow B \lesssim 10^{13} \text{G}$  の中性子星

# 本発表のまとめ

非線形量子電気力学（非線形QED）はレーザー実験や中性子星の周囲などの強い電磁場が存在する領域で重要になる物理学である。これらの実験や観測の発展により近い将来、理論の検証ができるはずである。

真空の屈折率に関しては、平面電磁波の勾配の効果を入れると勾配のない場合と比べ屈折率の虚部の性質が変わる。



中性子星放射の偏光に関してはマグネターの磁場が強いため、強い偏光が期待されるが、偏光モードの変換は期待できない。

偏光モードの変換が起こると偏光の向きが90度変わることがある。

